

22. Filtros

Ing. Fernando Ubiría

22.1 Definiciones y conceptos básicos

Llamamos *filtro* a una red eléctrica, pasiva o activa, que puede ser modelada mediante un sistema LTI y destinada a modificar las características de amplitud y/o de fase de una señal en función de la frecuencia. Los filtros se caracterizan mediante su *función de transferencia* $H(\omega)$.

Un filtro ideal permite el pasaje sin distorsión de una parte del espectro, llamada *banda pasante* y bloquea el resto, llamado *banda de rechazo*. El pasaje entre ambas bandas es abrupto y tiene lugar a la llamada *frecuencia de corte*. Las posiciones relativas de estas bandas sobre el eje de las frecuencias, permiten definir los cuatro tipos de filtros ideales de la fig. 1:

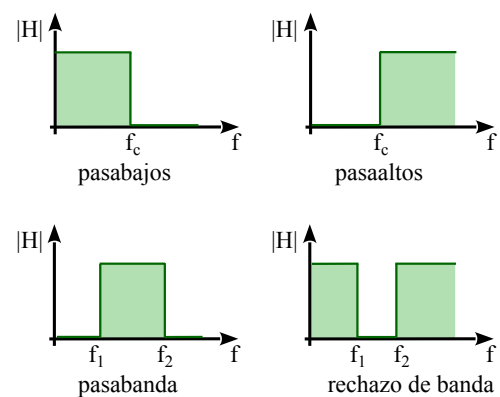


fig. 1

La discontinuidad que presenta la función de transferencia de los filtros ideales, no es realizable físicamente. La función de transferencia de los filtros reales presenta en cambio:

- Una transición progresiva entre las bandas de paso y de rechazo, la llamada *banda de transición*
- Ganancia irregular dentro de la banda de paso (ondulación)
- Una atenuación finita e irregular en

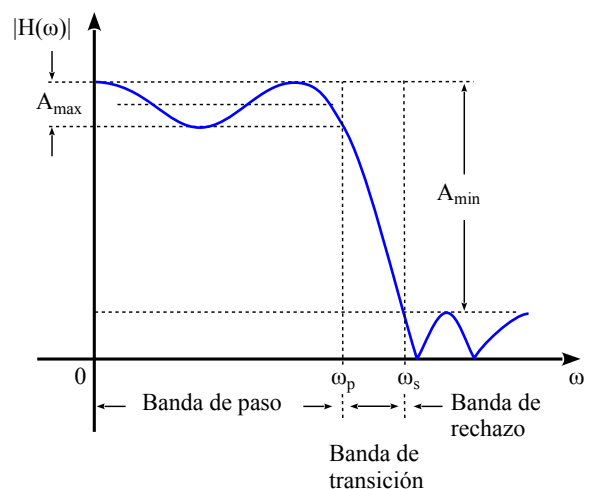


fig. 2

la banda de rechazo (ondulación)

- Variaciones en la relación de fase entre las señales de entrada y de salida

En la fig. 2 se muestran los parámetros que definen un filtro real, los cuales son:

- La *frecuencia de corte* ω_p : Es la frecuencia a la cual la respuesta del filtro deja la banda de error (el punto de -3dB para una respuesta de Butterworth)
- La *frecuencia límite de la banda de rechazo* ω_s : Es aquella frecuencia para la cual se alcanza la mínima atenuación en la banda de rechazo.
- La *ondulación de la banda de paso* $A_{\max}$: Es la variación de la respuesta dentro de la misma. Determina la máxima atenuación dentro de la banda de paso.
- La *mínima atenuación en la banda de rechazo* $A_{\min}$: Define la mínima atenuación de la señal dentro de la banda de rechazo.
- La *pendiente de la respuesta dentro de la banda de transición* o *steepness* del filtro, que se define como el *orden* N del mismo, siendo N el número de polos en la función de transferencia.

La función de transferencia de un filtro físicamente realizable de orden N, se puede escribir en forma general como un cociente de polinomios. Un polo es una raíz en el denominador de dicha función y un cero es una raíz en el numerador. Cada polo da una respuesta de -6dB/octava y cada cero una de +6dB/octava.

Factoreando los polinomios, la podemos escribir como:

$$H(s) = k \frac{(s-s_1)(s-s_3) \dots (s-s_m)}{(s-s_2)(s-s_4) \dots (s-s_N)} \quad m \leq N \quad (1)$$

donde: $s_1, s_3, \dots, s_m$, son los ceros de la función de transferencia

$s_2, s_4, \dots, s_N$, son los polos de la función de transferencia

Si reagrupamos los polos y los ceros, obtendremos:

- Términos de 1er orden, correspondientes a polos y ceros reales
- Términos de 2º orden, también llamados términos bicuadráticos o biquads, correspondientes a polos y ceros complejos, que están conjugados dos a dos.

De ese modo, $H(s)$ se puede descomponer en un producto de $N/2$ términos bicuadráticos si N es par, o en un producto de $(N-1)/2$ términos bicuadráticos y un término de 1er orden si N es impar.

Para $s = j\omega$, el módulo de $H(j\omega)$ es la *magnitud de la respuesta de frecuencia* del filtro, mientras que su ángulo es la *respuesta de fase* del mismo. Ese ángulo, que depende de ω , indica el corrimiento de fase en radianes que experimentará

cualquier componente sinusoidal de la señal de entrada.

El *retardo de fase* indica el retardo de tiempo en segundos experimentado por cada componente sinusoidal de la señal de entrada y se define como el cociente entre el ángulo de defasaje $\Phi(\omega)$

$$\tau_{\phi}(\omega) = - \frac{\phi(\omega)}{\omega} \quad (2)$$

y la frecuencia angular ω , ec. (2):

Cuando una señal contiene varios componentes, interesa la diferencia entre las fases de los mismos. Se define el *retardo de grupo* como la derivada del ángulo de fase respecto a la frecuencia angular:

$$\tau_y(\omega) = - \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (3)$$

Para que una señal experimente un retardo τ_y sin que se altere su forma en el dominio del tiempo, la función del retardo de grupo debe mantenerse constante dentro del margen de frecuencias que abarque el espectro de dicha señal.

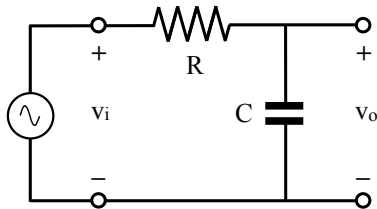
La *respuesta al impulso* de un filtro en el dominio del tiempo es proporcional al ancho de banda del mismo en el dominio de la frecuencia. Cuanto más angosto sea el impulso de salida, mayor es el ancho de banda del filtro. La *discriminación* (la capacidad de distinguir entre la señal deseada y el ruido u otras señales fuera de banda) y el tiempo de respuesta son inversamente proporcionales. La respuesta al impulso también aumenta con el orden del filtro. Los filtros de mayor orden implican una mayor limitación de la banda de paso y por lo tanto una degradación de la respuesta en el tiempo. Cada sección de un filtro multietapa tiene su propia respuesta al impulso y la respuesta al impulso total es la suma de las respuestas individuales. La degradación de la respuesta en el tiempo también se relaciona con el hecho de que, al aumentar la discriminación de frecuencia, el Q de las secciones individuales aumenta, aumentando a su vez el sobreimpulso y el ringing de las mismas.

La *respuesta al escalón*, es la integral de la respuesta al impulso. La pendiente del tiempo de subida es igual a la respuesta pico del impulso. El producto del ancho de banda del filtro y del tiempo de subida es constante. La respuesta al escalón es útil para determinar la distorsión de envolvente de una señal modulada. Los dos parámetros más importantes de la respuesta al escalón son el sobreimpulso y el ringing. El sobreimpulso debe ser mínimo para una buena respuesta a los pulsos y el ringing debe decaer tan rápido como sea posible, para no interferir con los pulsos subsiguientes.

22.2 Filtros pasivos de 1^{er} orden

Están compuestos por un resistor y un elemento reactivo.

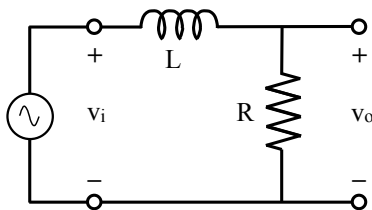
22.2.1 Filtros pasabajos



a)

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + sC \cdot R} \quad (4)$$

Tiene un polo en $s = -1/R \cdot C$



b)

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{1 + sL/R} \quad (5)$$

Tiene un polo en $s = -R/L$

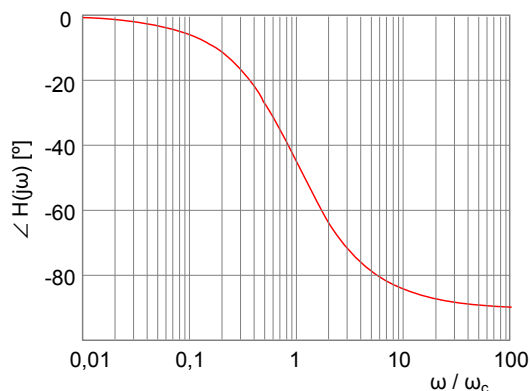
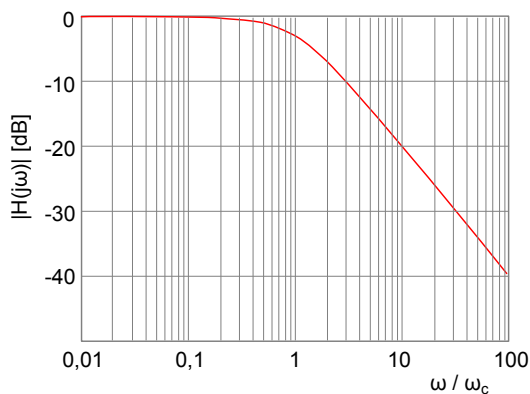


fig. 4

Como en régimen senoidal permanente $s = j\omega$, la función de transferencia deviene $H(j\omega)$

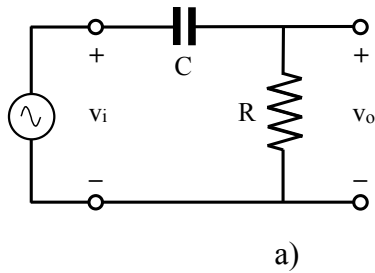
$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_c} \quad (6)$$

La frecuencia de corte de -3 dB de estos dos filtros es $\omega_c = 1/R \cdot C$ y $\omega_c = R/L$ respectivamente.

A la frecuencia ω_c , la señal de salida tendrá un desfase de -45° .

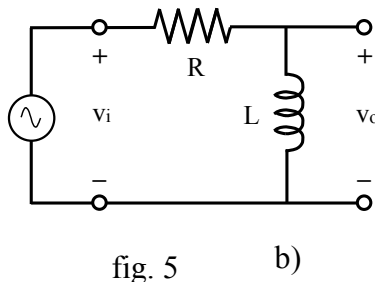
Por encima de la frecuencia de corte, el diagrama de Bode de estos filtros tiene una pendiente de 6 dB por octava, o sea de 20 dB por década.

22.2.2 Filtros pasaaltos



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{sC \cdot R}{1 + sC \cdot R} \quad (7)$$

Tiene un polo en $s = -1/R \cdot C$
y un cero en $s = 0$



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{s + R/L} \quad (8)$$

Tiene un polo en $s = -R/L$
y un cero en $s = 0$

fig. 5

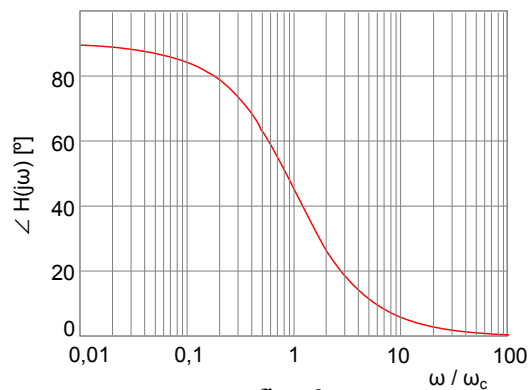
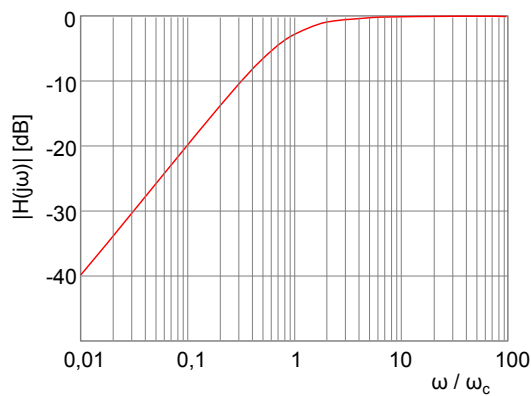


fig. 6

Como en régimen senoidal permanente $s = j\omega$, la función de transferencia deviene $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + \omega_c / j\omega} \quad (9)$$

La frecuencia de corte de -3 dB de estos dos filtros es $\omega_c = 1/R \cdot C$ y $\omega_c = R/L$ respectivamente.

A esa frecuencia, el defasaje de la señal de salida será de $+45^\circ$

Por debajo de la frecuencia de corte, el diagrama de Bode de estos filtros tiene una pendiente de 6 dB por octava, o sea de 20 dB por década.

22.3 Filtros pasivos de 2º orden

Su construcción requiere dos elementos reactivos no reducibles a uno solo.

22.3.1 Filtro pasabajos

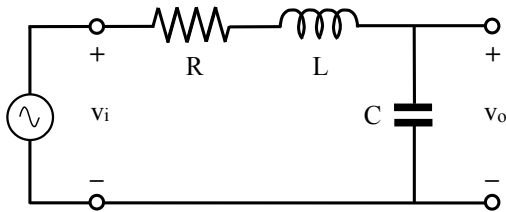


fig. 7

Examinaremos el comportamiento del circuito RLC serie como filtro pasabajos. Su función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1/sC}{sL + 1/sC + R} \quad (10)$$

$$\text{Sustituyendo: } \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \text{ y } Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o RC} \Rightarrow H(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (11)$$

En función del valor de Q , los polos de $H(s)$ serán reales o complejos conjugados:

i) Si $Q < 0,5$ la función de transferencia tendrá dos polos reales y negativos:

$$s_{1,2} = \frac{\omega_o}{2Q} [-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}]$$

ii) Si $Q = 0,5$ el amortiguamiento es crítico y la función de transferencia tiene un polo doble real y negativo:

$$s_1 = s_2 = -\omega_o$$

iii) Si $Q > 0,5$ habrá dos polos complejos conjugados cuya parte real es negativa:

$$s_{1,2} = \frac{\omega_o}{2Q} [-1 \pm j\sqrt{4Q^2 - 1}]$$

Respuesta de frecuencia

En régimen senoidal permanente $s = j\omega$, la función de transferencia deviene:

$$H(j\omega) = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j\frac{\omega}{\omega_o Q} + 1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2})^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_o^2}}} \angle -\text{tg}^{-1} \frac{\omega/\omega_o Q}{1 - \omega^2/\omega_o^2} \quad (12)$$

La función $H(j\omega)$ es una aproximación de la función de transferencia del pasabajos ideal y el valor de Q determina la forma que tendrá dicha aproximación.

Aproximación de Butterworth

Nos interesa determinar el valor de Q para que la curva de respuesta de amplitud sea lo más plana

posible, para ello

se deriva $|H(j\omega)|$

Como el denomi-

nador es siempre

positivo, el signo de la derivada dependerá

del numerador, el cual reescribimos como:

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{- \left[-2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cdot \frac{2\omega}{\omega_0^2} + \frac{2\omega}{Q^2 \omega_0^2} \right]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2} \right] \cdot 2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}} \quad (13)$$

$$\frac{2\omega}{\omega_0^2} \left(2 - \frac{1}{Q^2} - \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

Sí $Q \leq 1/\sqrt{2}$ la derivada de $|H(j\omega)|$ será negativa para todo valor de ω . De lo

contrario, $|H(j\omega)|$ tendrá un máximo a la frecuencia $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

La magnitud de la respuesta de frecuencia

más plana posible se obtiene para el valor:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad (14)$$

Aproximación de Bessel

Para minimizar la deformación que sufre una señal compleja al pasar a través del filtro, el retardo de grupo dentro de la banda pasante debe ser lo más constante posible. Para ello, se deberá hacer que las derivadas del argumento de $H(j\omega)$ respecto a ω desde la 2ª hasta la $2 \cdot n$ para un filtro de orden n , valgan 0 para $\omega = 0$.

$$\tau_y(\omega) = - \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega/\omega_0 Q}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \right)^2} \cdot \frac{(1/\omega_0 Q) (1 - \omega^2/\omega_0^2) + (2\omega/\omega_0^2)(\omega/\omega_0 Q)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2}$$

$$\tau_y(\omega) = \frac{1/\omega_0 Q - \omega^2/\omega_0^3 Q + 2\omega^2/\omega_0^3 Q}{1 - 2\omega^2/\omega_0^2 + \omega^4/\omega_0^4 + \omega^2/\omega_0^2 Q^2} \quad \text{Sí } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \tau_y(0) = \frac{1}{\omega_0 Q}$$

$$\text{Sustituyendo } \tau_y(0) : \quad \tau_y(\omega) = \tau_y(0) \cdot \frac{1 + \omega^2/\omega_0^2}{1 + \omega^2(1/\omega_0^2 Q^2 - 2/\omega_0^2) + \omega^4/\omega_0^4} \quad (15)$$

Sí hacemos que los coeficientes de ω^2 sean iguales en el numerador y en el denominador, la expansión en serie de $\tau_y(\omega)$ no tendrá términos entre 1 y ω^4 .

$$\text{Igualando los coeficientes:} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2 Q^2} - \frac{2}{\omega_0^2} \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \quad (16)$$

La fig. 8 nos muestra las curvas de respuesta de frecuencia de ambas aproximaciones. Por encima de la frecuencia de corte, el diagrama de Bode de estos filtros tiene una pendiente de 12 dB por octava, o sea de 40 dB por década. Podemos ver que la aproximación de Bessel tiene a ω_0 una atenuación mayor que -3 dB. Si queremos obtener un filtro cuya frecuencia de corte sea ω_2 , necesitaremos un *factor de escala FSF* que multiplicado por ω_2 nos permita hallar la ω_0 adecuada.

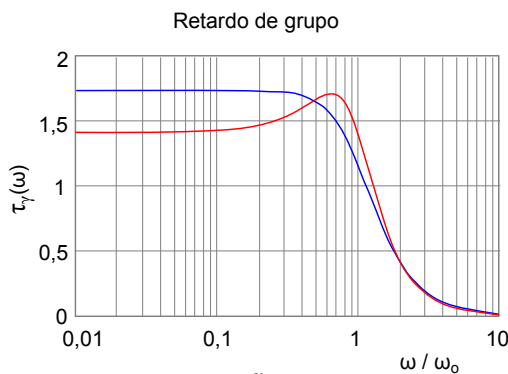
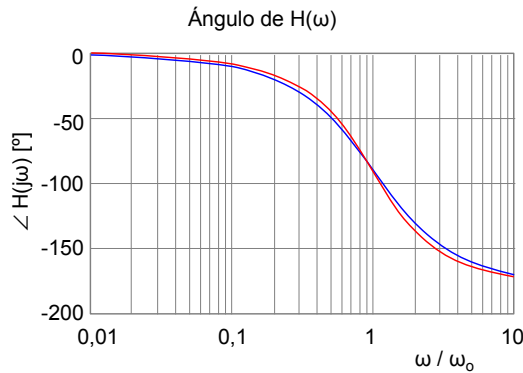
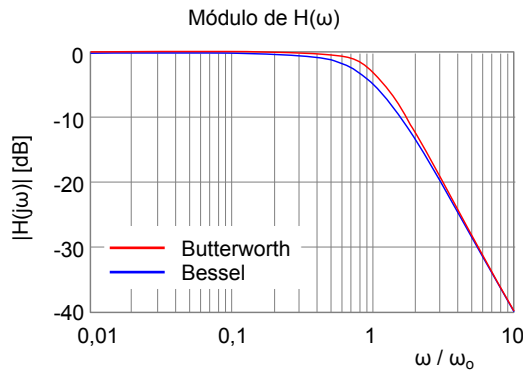


fig. 8

A ω_2 el denominador del módulo de la ec. (12) deberá ser igual a $\sqrt{2}$, si además sustituimos $Q = 1/\sqrt{3}$ obtenemos:

$$\Rightarrow 1 = \frac{\omega_2^4}{\omega_0^4} + \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} = 0,618 \Rightarrow \omega_0 = 1,272 \cdot \omega_2 \quad (17)$$

La fig. 9 muestra la curva de respuesta de frecuencia del filtro de Bessel luego de aplicar el factor de escala, comparada con la curva del filtro de Butterworth.

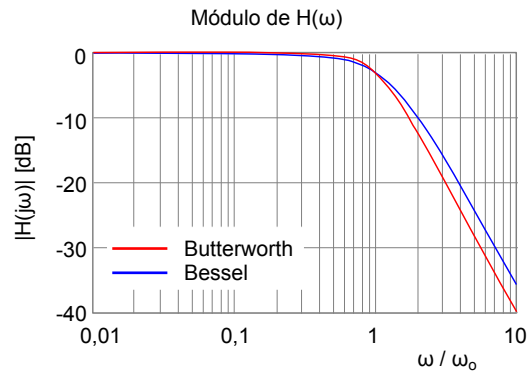


fig. 9

Stephen Butterworth (1885 – 1958) Físico inglés

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) Físico y matemático alemán

22.3.2 Filtro pasaaltos

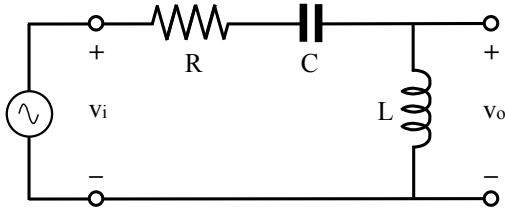


fig. 10

Examinaremos el comportamiento del circuito RLC serie como filtro pasaaltos. Su función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{sL}{sL + 1/sC + R} \quad (18)$$

$$\text{Sustituyendo: } \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \text{ y } Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o R C} \Rightarrow H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} s + \omega_o^2} \quad (19)$$

La función de transferencia $H(s)$ tiene los mismos polos dependientes del valor de Q que la función del filtro pasabajos y tiene asimismo un cero doble en el origen.

Respuesta de frecuencia

En régimen senoidal permanente $s = j\omega$, la función de transferencia deviene:

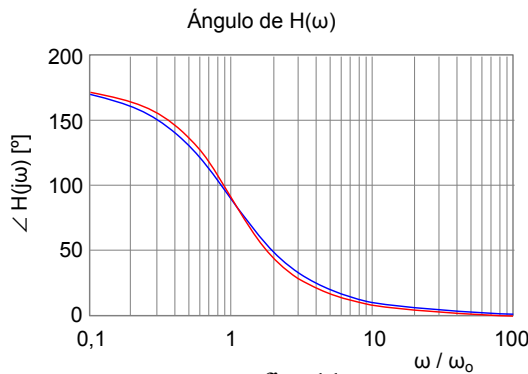
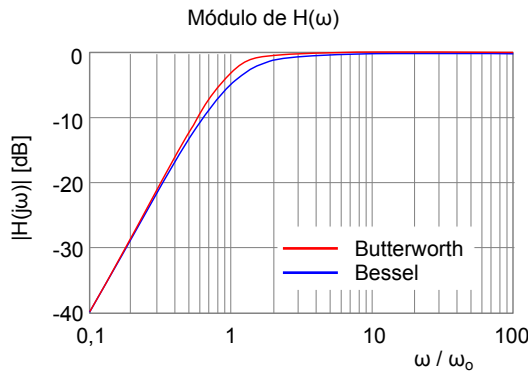


fig. 11

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2/\omega_o^2}{-\frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j\frac{\omega}{\omega_o Q} + 1} \quad (20)$$

El valor de Q determina la forma en que se aproxima el filtro al pasaaltos ideal. Siguiendo un procedimiento similar al usado para el filtro pasabajos, se llega a los mismos valores de Q para las aproximaciones de Butterworth y de Bessel, cuyas curvas de respuesta de frecuencia se ven en la fig. 11. Por debajo de la frecuencia de corte, la pendiente del diagrama de Bode es de 12 dB por octava, o sea de 40 dB por década.

Para el filtro de

$$\text{Bessel, el FSF es: } \omega_o = \frac{\omega_1}{1,272} \quad (21)$$

22.3.3 Filtro pasabanda

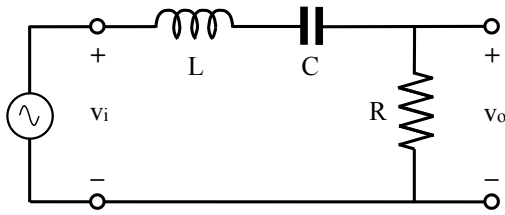


fig. 12

Examinaremos el comportamiento del circuito RLC serie como filtro pasabanda. Su función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{sL + 1/sC + R} \quad (22)$$

Sustituyendo: $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ y $Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o R C} \Rightarrow H(s) = \frac{s \cdot \omega_o / Q}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} s + \omega_o^2}$ (23)

La función de transferencia $H(s)$ tiene los mismos polos dependientes del valor de Q que la función del filtro pasabajos y tiene asimismo un cero en el origen.

Respuesta de frecuencia

En régimen senoidal permanente $s = j\omega$, la función de transferencia deviene:

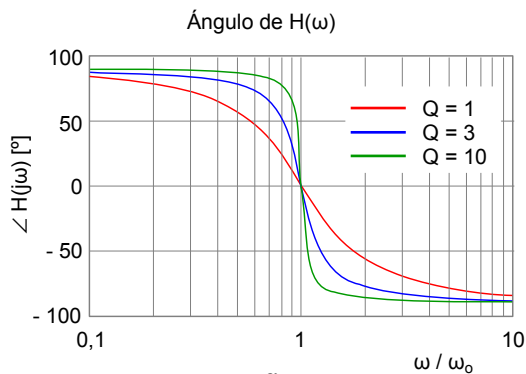
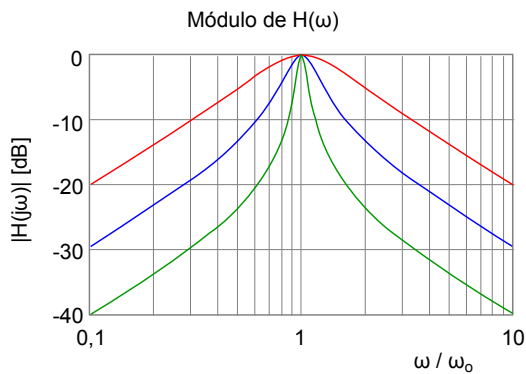


fig. 13

$$H(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_o Q}{-\frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j\frac{\omega}{\omega_o Q} + 1} \quad (24)$$

Del estudio de los circuitos resonantes conocemos la relación entre ω_o , Q y las frecuencias de corte de -3 dB ω_1 y ω_2 :

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \quad Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_o \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_r}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_r} \right]$$

La pendiente en las faldas de la curva de respuesta de frecuencia es de 6 dB por octava, o sea de 20 dB por década.

22.3.4 Filtro pasabanda RC de banda ancha

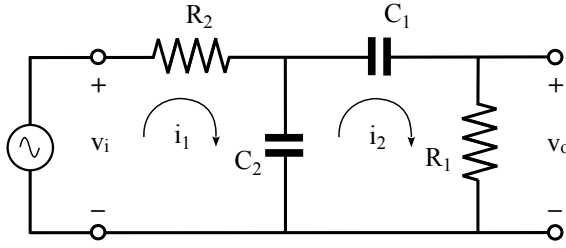


fig. 14

Conectando un filtro pasabajos y un filtro pasaaltos en cascada, es posible construir un filtro pasabanda cuya función de transferencia es similar a la del filtro pasabanda RLC.

Planteando las ecuaciones de malla del circuito de la fig. 14 y resolviendo el sistema para hallar i_2 , se obtiene la función de transferencia $H(s)$:

$$\begin{cases} i_1 \cdot R_2 + \frac{1}{sC_2} \cdot (i_1 - i_2) = v_i \\ \frac{1}{sC_2} \cdot (i_2 - i_1) + i_2 \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{i_2 \cdot R_1}{v_i} = \frac{s C_1 R_1}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s(C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2) + 1} \quad (25)$$

Definiremos ahora una constante k ,
que luego sustituiremos en la ec. (25):

$$k = \frac{C_1 R_1}{C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2} \quad (26)$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{k \cdot s (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2)}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s(C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2) + 1}$$

Dividiendo luego entre $C_1 R_1 C_2 R_2$, obtenemos una ec. con la forma de la ec. (23):

$$H(s) = \frac{k \cdot s \left(\frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} \right)}{s^2 + s \left(\frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} \right) + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}} \quad (27)$$

$\frac{1}{Q}$ ω_o
 $\frac{1}{Q}$ ω_o ω_o^2

Comprobaremos ahora que ése es el valor de ω_o . Suponiendo que en el filtro de la fig. 14 el efecto de C_1 sea despreciable para el filtro pasabajos y que C_2 sea despreciable a efectos del filtro pasaaltos, las frecuencias de corte serán:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 (R_1 + R_2)} \quad \omega_2 = \frac{1}{C_2 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} = \omega_o$$

Sustituyendo en la ec. (25) s por el valor de ω_0 hallado, vemos que la ganancia del filtro a la frecuencia central ω_0 es igual a la constante k definida anteriormente:

$$H(j\omega_0) = \frac{j \frac{1}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} \cdot C_1 R_1}{j^2 \frac{C_1 R_1 C_2 R_2}{(\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2})^2} + j \frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} + 1} = k$$

Para investigar cual es el máximo valor de Q posible, primero definiremos:

$$R = R_1 + R_2 ; b \mid R_1 = b \cdot R \text{ y } R_2 = (1-b)R ; T_1 = C_1 \cdot R \text{ y } T_2 = C_2 b(1-b)R$$

Sustituimos a continuación estas definiciones en la expresión de $1/Q$ contenida en la ec. (27)

y obtenemos:

$$\frac{1}{Q} = \frac{C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2}{\sqrt{C_1 R_1 C_2 R_2}} = \frac{C_1 R + C_2 R(1-b)}{\sqrt{C_1 b R \cdot C_2 (1-b) R}} = \frac{T_1 + T_2/b}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

Reagrupando los términos de esta última expresión, obtenemos:

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \cdot \left[\left(\frac{b \cdot T_1}{T_2}\right)^{1/2} + \left(\frac{T_2}{b \cdot T_1}\right)^{1/2} \right]$$

Esta última ecuación es de la forma $f(x) = a(x + 1/x)$, la cual tiene un mínimo en $x = 1$ con $f(1) = 2a$. Se obtendrá por lo tanto el máximo valor de Q cuando se cumpla que $T_2 = b \cdot T_1$, lo cual a su vez implica que $C_1/C_2 = 1 - b$.

$$\Rightarrow Q_{\max} = \frac{\sqrt{b}}{2} \quad \text{pero como } b \text{ no puede ser mayor que } 1 \Rightarrow Q_{\max} = \frac{1}{2}$$

En la práctica son comunes los valores de $b = 1/2$ y $b = 2/3$.

22.4 Filtros activos de 2° orden

Los filtros activos están compuestos por resistores, condensadores y elementos activos. A diferencia de la mayoría de los filtros pasivos estudiados anteriormente, son circuitos sin inductores. Se busca evitar el uso de inductores porque éstos, entre otras razones: Son relativamente grandes y pesados (especialmente los usados en baja frecuencia); Usualmente tienen mayores pérdidas asociadas que los condensadores de similar tamaño; Alinealidad; Saturación; Costo.

La función de transferencia de un circuito compuesto exclusivamente por resistores y condensadores sólo tiene polos en la parte negativa del eje real del plano S . El uso de elementos activos es lo que permite obtener polos en cualquier parte del plano complejo, en particular en el semiplano izquierdo.

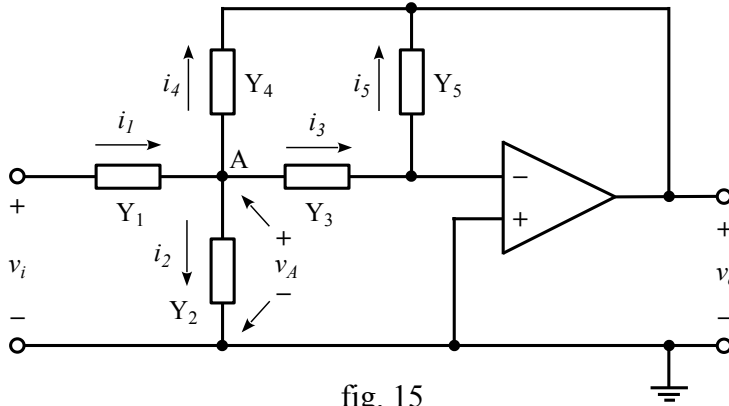
22.4.1 Estructura Multiple Feedback (MFB) o de Rauch¹

fig. 15

El circuito de la fig. 15 se puede usar para implementar una función de transferencia de tensión con un solo par de polos complejos conjugados y con ceros restringidos al origen o al infinito.

Considerando el nodo A y las corrientes i_j definidas en la fig 15, la tensión v_i se puede expresar como:

$$v_i = \frac{1}{Y_1} i_1 + v_A \quad (28)$$

y por la ley de Kirchhoff de las corrientes tenemos:

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \quad (29)$$

La presencia del amplificador operacional, implica una “tierra virtual” que hace que las tensiones sobre Y_2 e Y_3 sean iguales a v_A . A su vez, la tensión sobre Y_4 es la diferencia entre v_A y v_o . Las corrientes de rama son entonces:

$$i_2 = Y_2 \cdot v_A, \quad i_3 = Y_3 \cdot v_A, \quad i_4 = Y_4 (v_A - v_o) \quad (30)$$

Sustituyendo las ec. (30) en la (29) y ésta en la (28), se obtiene:

$$v_i = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{Y_1} v_A - \frac{Y_4}{Y_1} v_o + v_A \quad (31)$$

La tierra virtual también implica que no circula corriente por las entradas del amplificador operacional y por lo tanto $i_3 = i_5 \Rightarrow i_3 = Y_3 \cdot v_A = -Y_5 \cdot v_o = i_5$ (32)

Sustituyendo $v_A = -v_o \cdot Y_5 / Y_3$ en la ec. (31) y reordenando términos:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-Y_1 \cdot Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 \cdot Y_4} \quad (33)$$

La ec. (33) es la función de transferencia de tensión en circuito abierto de la estructura de Rauch de la fig. 15. Cada uno de los elementos pasivos Y_j es en la práctica un resistor o un condensador y eligiendo adecuadamente la naturaleza de los mismos, se pueden obtener las funciones de transferencia de un filtro pasabajos, un pasaaltos o un pasabanda.

¹ Lawrence L. Rauch (1919 – 2007) Ingeniero eléctrico y aeroespacial norteamericano

22.4.1.1 Filtro pasabajos MFB

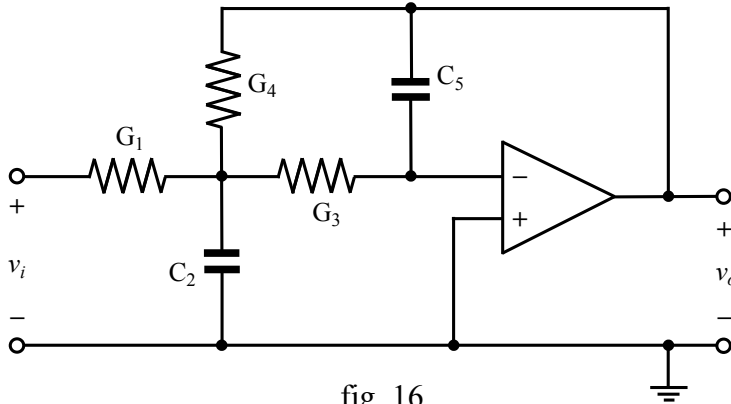


fig. 16

Primero deduciremos la naturaleza que deben tener las admitancias Y_j del circuito de la fig. 15 para que se comporte como un pasabajos de 2º orden. Para ello compararemos la ec. (33) con la ec. (11), a la cual hemos

agregado una constante real positiva H que representa la ganancia de tensión en la banda de paso:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Para que el numerador no sea función de s , Y_1 e Y_3 deben ser resistores. A su vez, para generar el término en s^2 , Y_5 debe ser un condensador y también debe serlo Y_2 o Y_4 , pero para poder generar a partir del producto $Y_3 \cdot Y_4$ el término constante en el denominador, Y_4 debe ser un resistor. El resultado es el circuito de la fig. 16 y la función de transferencia deviene:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-G_1 \cdot G_3}{s^2 C_2 \cdot C_5 + s C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 \cdot G_4} \quad (34a)$$

Expresamos las conductancias como $1/R$:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-1/R_1 \cdot R_3}{s^2 C_2 \cdot C_5 + s C_5 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{1}{R_3 \cdot R_4}} \quad (34b)$$

Operando, se obtiene la ec. (34c):

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}}{s^2 + s \frac{C_5 (R_3 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_3)}{R_1 \sqrt{R_3 R_4 C_2 C_5}} + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} \quad (34c)$$

$\frac{R_4}{R_1}$ (H) $\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}$ (ω_0^2)
 $\frac{C_5 (R_3 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_3)}{R_1 \sqrt{R_3 R_4 C_2 C_5}}$ ($1/Q$) $\frac{1}{\sqrt{R_3 R_4 C_2 C_5}}$ (ω_0) $\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}$ (ω_0^2)

Para el filtro pasabajos MFB tenemos entonces:

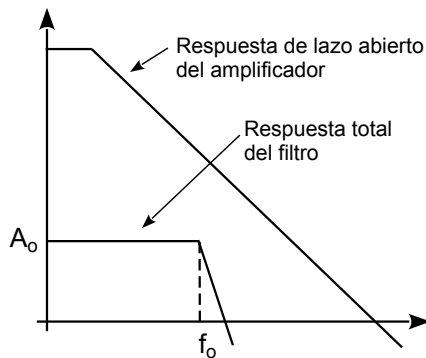
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_4 C_2 C_5}} \quad Q = \frac{\sqrt{R_3 R_4 C_2 C_5}}{C_5 R_3 H + C_5 R_4 + C_5 R_3}$$

Para calcular los valores de los componentes a partir de H , ω_0 y Q , estas dos últimas ecuaciones se pueden simplificar escribiendo $R_3 = m \cdot R_4$ y $C_2 = n \cdot C_5$.

$$\text{Sustituyendo} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_4 C_5 \sqrt{m \cdot n}} \quad Q = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{1 + m(H + 1)}$$

Se deben elegir valores para m y n , por ejemplo $\sqrt{m \cdot n} = 2Q \Rightarrow m = \frac{1}{H+1}$, $n = 4Q^2(H+1)$

Método de proyecto¹



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \omega_0^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|A_0| = H, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \cdot FSF$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{recibe el nombre de peaking factor}$$

Elegir:

$$C = \frac{k}{2\pi f_0} \quad (\text{define } k)$$

$$H = |A_0|$$

α determina la forma de la respuesta

Calcular:

$$C_5 = C = \frac{k}{2\pi f_0}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk}$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k}$$

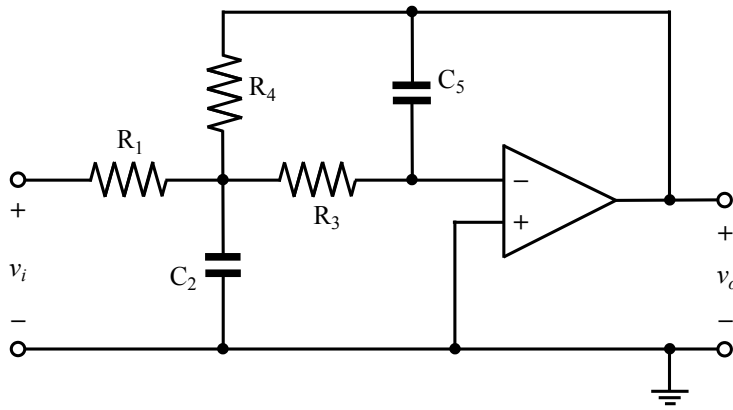
$$R_4 = \frac{\alpha}{2k} = HR_1$$

¹ Propuesto por Texas Instruments en SBOA093A y SLOA049d

Ejemplo

Proyectar un filtro pasabajos de 2º orden MFB con las siguientes características:

$A_0 = -10$, frecuencia de corte de -3 dB $f_2 = 3,3 \text{ KHz}$, respuesta de Bessel



$$H = |A_0| = 10 \quad \text{Para respuesta de Bessel: } \alpha = 1,732 \text{ y } FSF = 1,272$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 1,272 = 26374 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 1 \text{ nF} = C_5 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 26374 \text{ r/s} \cdot 1 \text{ nF} = 2,6374 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0} = \frac{4}{1,732^2} \cdot 11 \cdot \frac{2,6374 \cdot 10^{-5}}{26374} = 14,67 \text{ nF} \approx 15 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{1,732}{2 \cdot 10 \cdot 2,6374 \cdot 10^{-5}} = 3283 \Omega \approx 3 \text{ K} 3$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{1,732}{2 \cdot 11 \cdot 2,6374 \cdot 10^{-5}} = 2985 \Omega \approx 3 \text{ K}$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 10 \cdot 3,3 \text{ K} = 33 \text{ K}$$

22.4.1.2 Filtro pasaaltos MFB

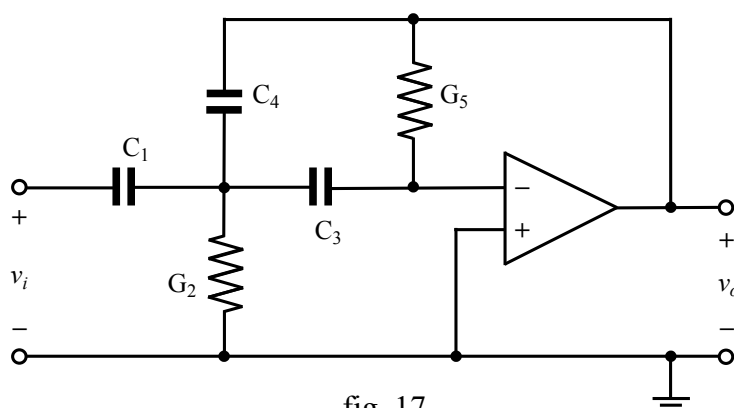


fig. 17

Primero deduciremos la naturaleza que deben tener las admitancias Y_j del circuito de la fig. 16 para que se comporte como un pasaaltos de 2º orden. Para ello comparemos la ec. (33) con la ec. (19), a la cual hemos

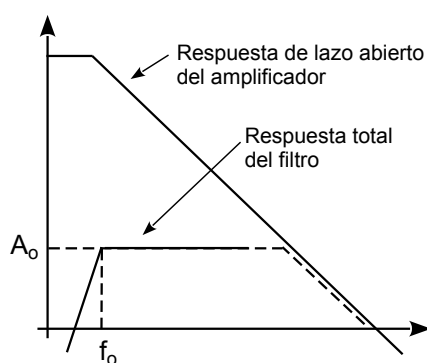
agregado una constante real positiva H que representa la ganancia de tensión en la banda de paso:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Mediante un razonamiento similar al usado en la sección anterior, se deduce que la naturaleza de los componentes es la mostrada en la fig. 17. La función de transferencia deviene:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-s^2 C_1 \cdot C_3}{s^2 C_3 \cdot C_4 + s G_5 (C_1 + C_3 + C_4) + G_2 \cdot G_5} \quad (35)$$

Método de proyecto



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \cdot s^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|A_0| = H, \quad \omega_0 = \frac{2\pi f_1}{FSF}$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{peaking factor}$$

Elegir:

$$C = \frac{k}{2\pi f_0} \quad (\text{define } k)$$

$$H = |A_0|$$

α determina la forma de la respuesta

Calcular:

$$C_1 = C_3 = C = \frac{k}{2\pi f_0}$$

$$C_4 = C/H$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{k(2+1/H)} \quad R_5 = \frac{H(2+1/H)}{\alpha k}$$

22.4.1.3 Filtro pasabanda MFB

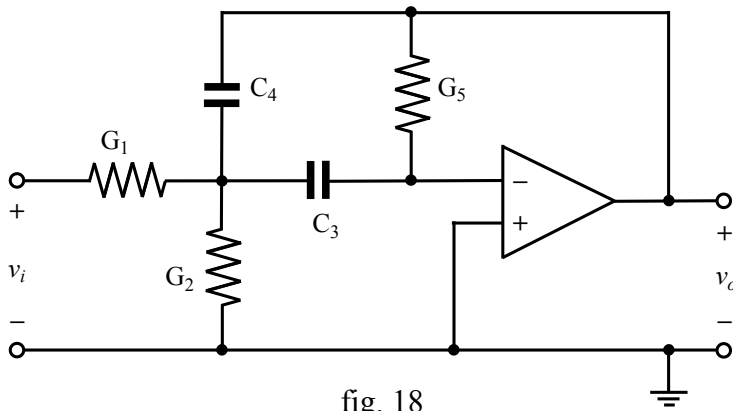


fig. 18

Existe más de una configuración de los cinco elementos Y_j que permite obtener la función de transferencia de un filtro pasabanda de 2º orden. Reproducimos la ec. (23), pero introduciendo una constante real positiva H

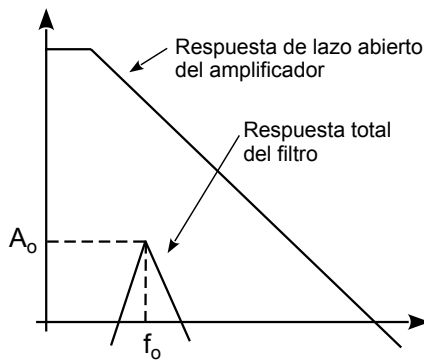
de modo tal, que $H \cdot Q$ representa la ganancia de tensión a la frecuencia central f_0 del filtro:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \cdot \omega_0 \cdot s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

En la fig. 18 se muestra una de las configuraciones más prácticas. En este caso, la función de transferencia de la ec. (33) deviene:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-s G_1 \cdot C_3}{s^2 C_3 \cdot C_4 + s G_5 (C_3 + C_4) + G_5 (G_1 + G_2)} \quad (36)$$

Método de proyecto



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-H \cdot \omega_0 \cdot s}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|A_0| = H \cdot Q \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{peaking factor}$$

Elegir:

$$C = \frac{k}{2\pi f_0} \quad (\text{define } k)$$

$$H = |A_0| / Q$$

$$\alpha = 1/Q$$

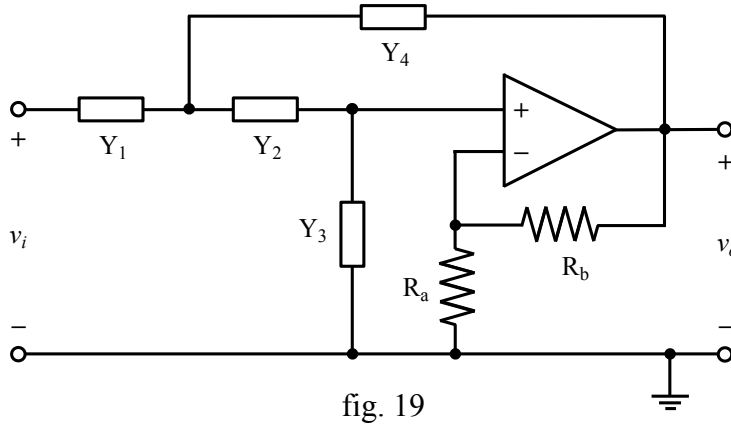
Calcular:

$$C_3 = C_4 = C = \frac{k}{2\pi f_0}$$

$$R_1 = 1/(H \cdot k)$$

$$R_2 = \frac{1}{k(2Q - H)} \quad R_5 = \frac{2 \cdot Q}{k}$$

22.4.2 Estructura de Sallen-Key¹ (Voltage-Controlled Voltage Source-VCVS)



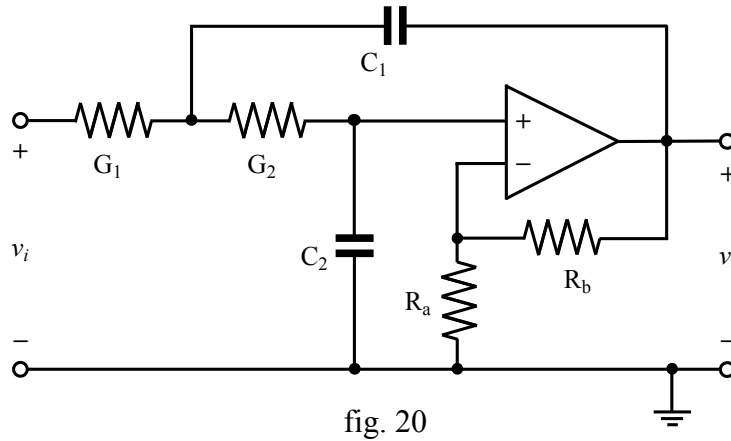
Esta estructura requiere un elemento activo con una ganancia de tensión K relativamente baja. Si se usa un amplificador operacional en configuración no inversora:

$$K = \frac{R_a + R_b}{R_a}$$

Al mismo se conecta una red pasiva cuya forma general se muestra en la fig. 19, obteniendo la función de transferencia ideal²

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{K \cdot Y_1 Y_2}{Y_3 Y_4 + Y_3 Y_1 + Y_3 Y_2 + Y_2 Y_4 (1-K) + Y_1 Y_2} \quad (37)$$

22.4.2.1 Filtro pasabajos de Sallen-Key



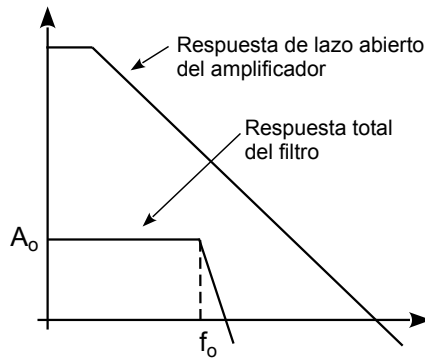
Primero deduciremos la naturaleza que deben tener las admitancias Y_j del circuito de la fig. 19 para que se comporte como un pasabajos de 2° orden. Para ello comparemos la ec. (37) con la ec. (11). Para que el nu-

merador no sea función de s , Y_1 e Y_2 deben ser resistores. A su vez, para generar el término en s^2 , Y_3 e Y_4 deben ser condensadores. El resultado es el circuito de la fig. 20 y su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{K \cdot G_1 G_2}{s^2 C_1 C_2 + s [C_2 G_1 + C_2 G_2 + G_2 C_1 (1-K)] + G_1 G_2} \quad (38)$$

¹ R. P. Sallen y E. L. Key – Investigadores del MIT Lincoln Laboratory

² James Karki, Analysis of the Sallen-Key Architecture - Texas Instruments SLOA024B

Método de proyecto

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{H \omega_0^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|A_0| = H = K, \quad \omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{peaking factor}$$

Elegir:

Calcular:

$$C_1 = \frac{k}{2\pi f_0} \quad (\text{define } k)$$

$$m = \frac{\alpha^2}{4} + (H-1)$$

$$H = |A_0|$$

$$C_2 = m \cdot C_1 = \frac{m \cdot k}{2\pi f_0}$$

α determina la forma de la respuesta

$$R_1 = \frac{2}{\alpha k}$$

$$R_b = R_a (H-1)$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{2 \cdot m \cdot k}$$

Ejemplo

Proyectar un filtro pasabajos de 2° orden Sallen-Key con las siguientes características: $A_0 = 1$, $f_2 = 3,3 \text{ KHz}$, respuesta de Butterworth

$$H = |A_0| = 1 \quad \text{Para respuesta de Butterworth: } \alpha = \sqrt{2} \text{ y } FSF = 1$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 1 = 20734,5 \text{ r/s}$$

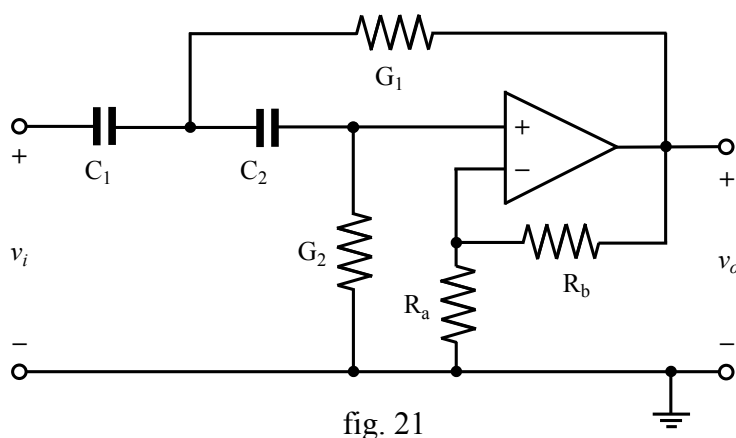
$$\text{Elegimos } C_1 = 2,2 \text{ nF} \quad \Rightarrow \quad k = \omega_0 \cdot C_1 = 20734,5 \text{ r/s} \cdot 2,2 \text{ nF} = 4,562 \cdot 10^{-5}$$

$$m = \frac{\alpha^2}{4} + (H-1) = \frac{2}{4} + 0 = 0,5 \quad C_2 = m \cdot C_1 = 0,5 \cdot 2,2 \text{ nF} = 1,1 \text{ nF} \approx 1 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{2}{\alpha k} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 4,562 \cdot 10^{-5}} = 30999 \Omega \approx 30 \text{ K}$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{2 \cdot m \cdot k} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 0,5 \cdot 4,562 \cdot 10^{-5}} = 30999 \Omega \approx 30 \text{ K}$$

22.4.2.2 Filtro pasaaltos de Sallen-Key



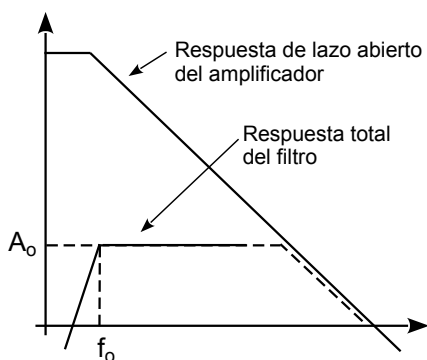
Primero deduciremos la naturaleza que deben tener las admitancias Y_j del circuito de la fig. 21 para que se comporte como un pasaaltos de 2º orden. Para ello comparemos la ec. (37) con la ec. (19). Para que el nu-

merador sea una función de s^2 , Y_1 e Y_2 deben ser condensadores y para generar el término constante en el denominador, Y_3 e Y_4 deben ser resistores. La función de transfe-

encia es:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{K \cdot s^2 C_1 C_2}{s^2 C_1 C_2 + s[C_1 G_2 + C_2 G_2 + G_1 C_2(1-K)] + G_1 G_2} \quad (39)$$

Método de proyecto



$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{H \cdot s^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|A_0| = H = K, \quad \omega_0 = \frac{2\pi f_1}{FSF}$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{peaking factor}$$

Elegir:

$$C_1 = \frac{k}{2\pi f_0} \quad (\text{define } k)$$

$$H = |A_0|$$

α determina la forma de la respuesta

$$R_b = R_a (H-1)$$

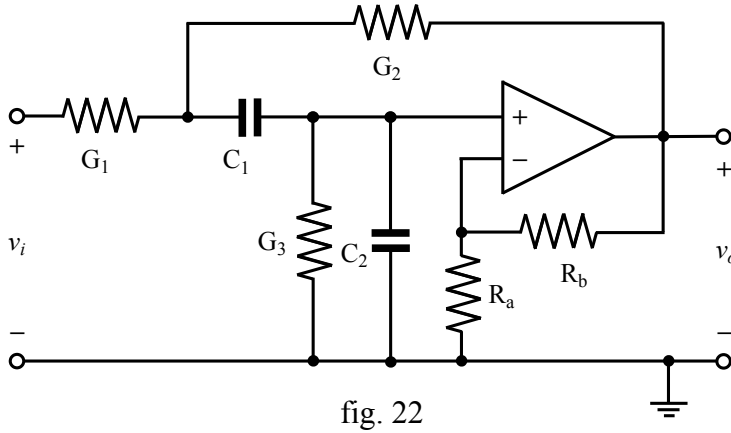
Calcular:

$$C_2 = C_1$$

$$R_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8(H-1)}}{4 \cdot k}$$

$$R_2 = \frac{4}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8(H-1)}} \cdot \frac{1}{k}$$

22.4.2.3 Filtro pasabanda de Sallen-Key



Existen varias configuraciones de los elementos Y_j que permiten obtener la función de transferencia de un filtro pasabanda de 2º orden. En la figura 22 se muestra una red que en la práctica ha dado buenos resultados.

La función de transferencia escrita en términos de los elementos de la red es:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{s K \cdot C_1 G_1}{s^2 C_1 C_2 + s [C_1 G_3 + C_2 G_1 + C_2 G_2 + C_1 G_1 + C_1 G_2 (1 - K)] + G_3 (G_1 + G_2)} \quad (40a)$$

Expresando las conductancias como $1/R$ y operando, se obtiene la ec. (40b):

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{s K \cdot \overset{\omega_0}{(1/R_1 C_2)}}{s^2 + s \underbrace{\frac{1}{C_1 C_2} \left[\frac{C_1}{R_3} + \frac{C_1 + C_2}{R_1} + \frac{C_2 + C_1 (1 - K)}{R_2} \right]}_{\omega_0 / Q} + \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}_{\omega_0^2}} \quad (40b)$$

Recordemos ahora como es la función de transferencia del filtro pasabanda:

$$H(s)_{BP} = \frac{v_o}{v_i} = \frac{H \cdot \omega_0 \cdot s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Comparándola con la ec. (40b), vemos que los valores de los elementos del circuito de la fig. 22 deben guardar entre sí una relación tal que se cumpla que:

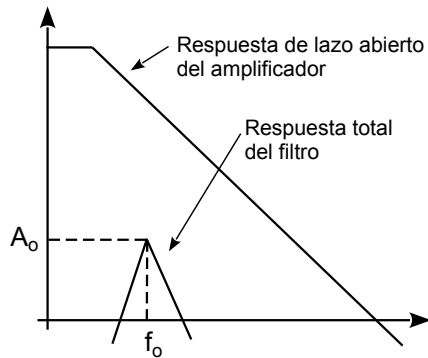
$$\frac{1}{R_1 C_2} = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Esa condición se cumple si: $C_2 = C_1 / 2$, $R_2 = R_1 / 3$ y $R_3 = 2 \cdot R_1$ (41)

Sustituyendo estos valores en el término de 1er grado del denominador e igualándolo a ω_0 / Q , resultará que:

$$K = \frac{1}{3} \left(6,5 - \frac{1}{Q} \right) \quad (42)$$

En este circuito no se pueden fijar los valores de K y Q en forma independiente, sino que ambos están interrelacionados.

Método de proyecto

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{H \cdot \omega_o \cdot s}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$$

$$|A_o| = H \cdot Q \quad H = K$$

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \omega_o = 2\pi f_o$$

Elegir:

$$C_1 = \frac{k}{2\pi f_o} \quad (\text{define } k)$$

$$\alpha = 1/Q$$

Calcular:

$$C_2 = \frac{1}{2} C_1 = \frac{k}{4\pi f_o}$$

$$R_1 = 2/k$$

$$R_2 = \frac{2}{3 \cdot k} = \frac{R_1}{3} \quad H = \frac{1}{3} \left(6,5 - \frac{1}{Q} \right)$$

$$R_3 = \frac{4}{k} = 2 \cdot R_1 \quad R_b = R_a (H - 1)$$

EjemploProyectar un filtro pasabanda Sallen-Key de 2º orden, $f_1 = 300 \text{ Hz}$, $f_2 = 3,4 \text{ KHz}$

$$f_o = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = \sqrt{300 \cdot 3400} = 1010 \text{ Hz} \quad Q = \frac{f_o}{f_2 - f_1} = \frac{1010 \text{ Hz}}{3,4 \text{ KHz} - 300 \text{ Hz}} = 0,32$$

$$\text{Elegimos } C_1 = 10 \text{ nF} \quad \Rightarrow \quad k = \omega_o \cdot C_1 = 2\pi \cdot 1010 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ nF} = 6,35 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = 0,5 \cdot C_1 = 0,5 \cdot 10 \text{ nF} = 5 \text{ nF} \approx 4,7 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{2}{k} = \frac{2}{6,35} \cdot 10^{-5} = 31496 \Omega \approx 33 \text{ K} \quad R_2 = \frac{R_1}{3} = \frac{33 \text{ K}}{3} = 11 \text{ K} \approx 10 \text{ K}$$

$$R_3 = 2 \cdot R_1 = 2 \cdot 33 \text{ K} = 66 \text{ K} \approx 68 \text{ K} \quad H = \frac{1}{3} \left(6,5 - \frac{1}{0,32} \right) = 1,125$$

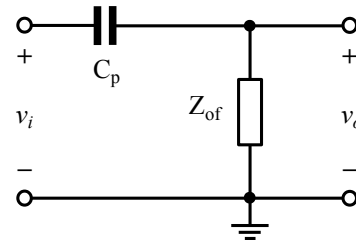
$$\text{Elegimos } R_b = 4,7 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad R_a = \frac{R_b}{H - 1} = \frac{4,7 \text{ K}}{1,125 - 1} = 37,6 \text{ K} \approx 36 \text{ K}$$

$$|A_o| = H \cdot Q = 1,125 \cdot 0,32 = 0,36$$

22.4.3 Operación no ideal del circuito

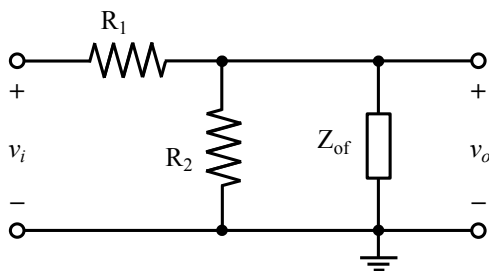
Las discusiones previas asumieron un circuito ideal, una suposición que no es válida por encima de una cierta frecuencia. Veremos los efectos para cada filtro.

Pasabajos MFB: A frecuencias muy por encima de la de corte, el circuito se comportará como el modelo de la figura: Las reactancias de C_2 y C_5 serán muy bajas comparadas con R_1 , R_3 y R_4 , por lo que la entrada del amplificador estará conectada a tierra para la AC, generándose así a la salida un camino a tierra a través de la impedancia de salida de lazo cerrado Z_{of} . La capacidad C_p del modelo representa la capacidad parásita entre la entrada y la salida. La habilidad del circuito para atenuar las frecuencias altas dependerá de C_p y Z_{of} . Diferentes amplificadores



tienen diferentes impedancias de salida de lazo cerrado Z_{of} y pueden por lo tanto afectar la respuesta de alta frecuencia del filtro. Se debe planificar el conexionado del filtro asegurándose de que el acoplamiento capacitivo entre entrada y salida sea mínimo. Un filtro pasabajos RC a la salida del amplificador puede ayudar a eliminar las señales de alta frecuencia que puedan lograr pasar.

Pasabajos de Sallen-Key: Asumiendo que el amplificador tiene una respuesta de frecuencia adecuada más allá de la frecuencia de corte, el filtro funcionará como está previsto. A frecuencias muy por encima de la de corte, el circuito se comportará como el modelo de la figura: Las reactancias de C_1 y C_2 serán muy bajas comparadas con R_1 y R_2 , de modo que la entrada del amplificador estará efectivamente a tierra para la AC. La salida quedará entonces conectada a tierra para la AC a través de la impedancia de salida de lazo cerrado Z_{of} , la cual depende de la ganancia de lazo $A(f) \cdot B$ y de la impedancia de salida de lazo abierto Z_o .



$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{Z_{of}} + 1} \approx \frac{Z_{of}}{R_1} \quad \text{sí } Z_{of} \ll R_1$$

$$Z_{of} = \frac{Z_o}{1 + A(f) \cdot B}$$

Mientras que el factor B es constante por depender de R_a y R_b , la ganancia de lazo abierto $A(f)$ depende de la frecuencia. Con compensación de polo dominante, $A(f)$ disminuirá 20 dB/dec dentro del margen de frecuencias de operación. Asumiendo que Z_o es resistiva (suposición usualmente válida hasta los 100 MHz), Z_{of} aumentará al mismo ritmo y así la función de transferencia semejará un pasaaltos de 1^{er} orden. Por encima de los 100 MHz, debido a las inductancias parásitas pasará a comportarse como un pasaaltos de 2^o orden y finalmente a frecuencias mayores la salida se atenuará debido a las capacidades parásitas. Se puede mejorar la respuesta de alta frecuencia mediante un pasabajos RC a la salida del circuito, lo que agrega un polo pasivo a la función de transferencia.

Pasaaltos: Suponiendo que el amplificador tenga una respuesta de frecuencia adecuada más allá de la frecuencia de corte del filtro, para ambas estructuras el filtro se comportará como se espera. A frecuencias muy altas, el circuito dejará de operar según lo esperado cuando el producto $A(f) \cdot B$ ya no sea mucho mayor que 1. Debido a estas limitaciones prácticas, los filtros pasaaltos serán en realidad filtros pasabanda cuya frecuencia de corte superior quedará determinada por la respuesta de lazo abierto del amplificador.

22.4.4 Elección de los componentes pasivos

Resistores: En lo posible usar valores entre algunos cientos de Ohms para que las corrientes de salida de los amplificadores sean bajas y 100 K para limitar el ruido térmico. Usar resistores de película metálica con bajo coeficiente de temperatura y tolerancias de 1% o mejor.

Condensadores: Evitar los valores inferiores a 100 pF, se aconseja usar valores entre 1nF y algunos μ F y tolerancias de 5% o mejor. Usar condensadores cerámicos con dieléctrico tipo NPO o eventualmente X7R, condensadores de mica plateada, condensadores de polipropileno o de policarbonato. Si se requieren capacidades altas, usar condensadores electrolíticos de tantalio.

22.5 Filtros de orden N

Cuando varias etapas amplificadoras que incluyen filtros de 1^{er} y 2^o orden se conectan en cascada se forma un filtro de orden N, siendo N igual a la suma de los órdenes de los filtros individuales.

El primer paso en el proyecto de un filtro eléctrico práctico es la *aproximación*, la misma consiste en hallar una función de transferencia que se aproxime, con el grado de exactitud especificado, a la función de transferencia del filtro deseado. Ésto se traduce generalmente en una plantilla delimitada por las bandas de paso y de rechazo, dentro de la cual deberá inscribirse la gráfica del módulo de la función de transferencia $H(j\omega)$ del filtro a construir. Asumiendo a partir de aquí un filtro pasabajos, la frecuencia de corte ω_c , definida como la frecuencia a la cual la ganancia del filtro cae a 0,707 de su valor máximo, cumple que $\omega_p \leq \omega_c \leq \omega_s$

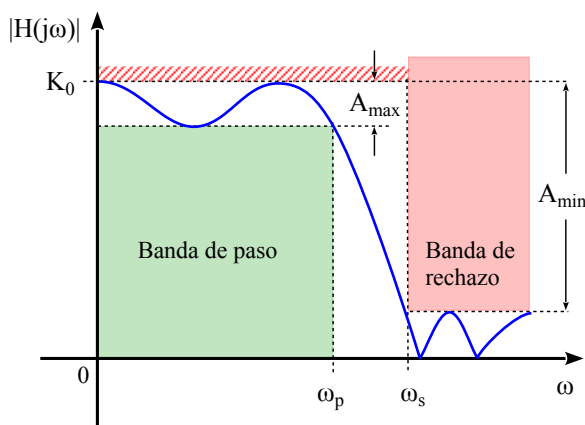


fig. 23

Normalización

Para poder estudiar los filtros independientemente del valor de su frecuencia de corte, se toma como referencia la frecuencia de paso del mismo y se obtiene así la *frecuencia normalizada* $F = f/f_p$, la cual no tiene dimensión. En forma similar se obtiene la frecuencia angular normalizada $\Omega = \omega/\omega_p$. Normalizando $|H(j\omega)|$ y expresándolo en dB, el filtro queda totalmente definido por los parámetros $A_{\max}$, $A_{\min}$ y $\Omega_s = \omega_s/\omega_p$. A partir de la frecuencia normalizada Ω , se define la función de transferencia normalizada $H(j\Omega)$.

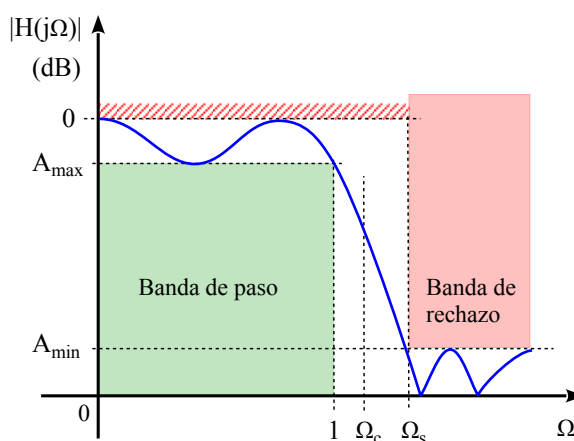


fig. 24

Función de aproximación

La característica básica más común que un procedimiento de proyecto de filtros analógicos debe satisfacer, es la magnitud de la respuesta especificada. La excepción es la respuesta de Bessel, que debe tener un tiempo de retardo lo más plano posible. Como punto de partida para el estudio, nos valdremos de la respuesta de frecuencia del cuadrado de la magnitud. Como puede verse en la siguiente ecuación y debido a la simetría impar de la fase, los ángulos de fase se cancelan y el producto es un número real.

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H^*(j\Omega) = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega)$$

Esto simplifica significativamente el proceso de diseño, pues sólo es necesario considerar la magnitud y no es necesario especificar la fase.

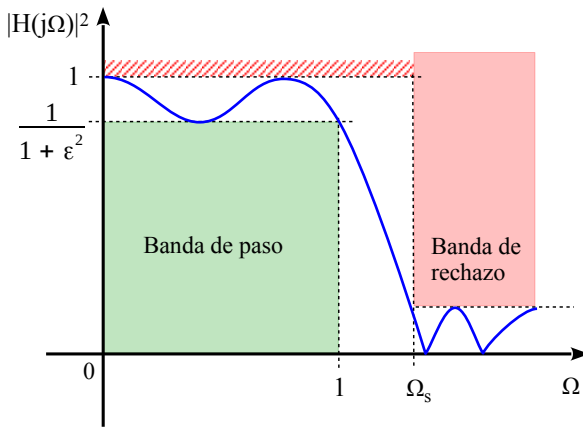


fig. 25

El filtro introduce una atenuación de potencia $A_N(\Omega)$ en dB definida por:

$$A_N(\Omega) = 10 \log[1 + \varepsilon^2 \cdot T_N^2(\Omega)] \quad (43)$$

Donde ε es un parámetro dependiente de la atenuación máxima dentro de la banda de paso, con $0 < \varepsilon \leq 1$.

T_N es la *función característica de la aproximación*, a la cual le imponemos

las siguientes condiciones: $|T_N(\Omega)| \leq 1$ para $\Omega \leq 1$ y $|T_N(1)| = 1$ (43 b)

El inverso de $1 + \varepsilon^2 \cdot T_N^2(\Omega)$ es el $|H(j\Omega)|^2$ y en consecuencia, el módulo de la función de transferencia normalizada del filtro es:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot T_N^2(\Omega)}} \quad (44)$$

De sustituir $T_N(1) = 1$ en la ec. (44), se deduce la relación entre ε y $A_{\max}$:

$$|H(1)|_{\text{dB}} = A_{\max} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad A_{\max} \leq 0 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{-0,1 A_{\max}} - 1} \quad (45)$$

La forma de T_N permite distinguir entre dos tipos de aproximaciones: *polinomial* si ésta es un polinomio y *no polinomial* si se trata de una fracción racional.

22.5.1 Aproximación de Butterworth

Esta aproximación conduce a filtros sin ondulación en la banda pasante. A partir de la ec. (6) y de la ec. (12) se obtiene el módulo de $H(j\omega)$ para varios filtros conectados en cascada. En la ec. (46), las C_{N-1} , C_{N-2} , ..., C_1 son constantes determinadas por los distintos parámetros del circuito, las frecuencias de corte individuales son ω_{c1} , ω_{c2} , ..., y hemos asumido que ω_{c1} pertenece a un filtro de 1^{er} orden y ω_{c2} a un filtro de 2^o orden.

$$|H(j\omega)| = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot \omega_{c1} \cdot \omega_{c2}^2 \cdot \dots}{\sqrt{\omega^{2N} + C_{N-1} \omega^{2N-2} + C_{N-2} \omega^{2N-4} + \dots + C_1 \omega^2 + \omega_{c1} \cdot \omega_{c2}^2 \cdot \dots}} \quad (46)$$

La respuesta más plana ocurre cuando las primeras $N-1$ derivadas de la ec. (46) tomadas respecto a ω^2 , son iguales a cero en el punto $\omega = 0$. De esto resulta¹ que $C_{N-1} = C_{N-2} = \dots = C_1 = 0$.

Sí $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \dots = \omega_c$, la

$$|H(j\omega)| = \frac{(K_1 \cdot K_2 \cdot \dots) \cdot \omega_c^N}{\sqrt{\omega^{2N} + \omega_c^{2N}}} = \frac{(K_1 \cdot K_2 \cdot \dots)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad (46b)$$

ec. (46) deviene la (46b):

Normalizamos la ec. (46b)

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}} \quad (47)$$

y la elevamos al cuadrado:

Comparamos la ec. (47) con la (44) y como $\Omega_p = 1$, la función característica resulta ser de la forma $T_N(\Omega) = \Omega^N$.

Determinación de los polos

Sustituyendo $\Omega = s/j$ y $\Omega_p = 1$:

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-1)^N \cdot s^{2N}}$$

Los polos serán las soluciones de la ecuación $1 + \varepsilon^2 (-1)^N \cdot s^{2N} = 0$

Supongamos por ahora que $\varepsilon = 1$

Sí N es par, $(-1)^N = 1 \Rightarrow s_k = \sqrt[2N]{-1} = e^{j\pi(2k+1)/2N}$ para $k = 0, 1, \dots, 2N-1$

La solución son las $2N$ raíces $2N$ -ésimas de -1 , las cuales se encuentran en el círculo de radio unidad.

¹ V. Landon, Cascade Amplifiers with Maximal Flatness - RCA Review, January & April 1941

Sí N es impar, $(-1)^N = -1 \Rightarrow s_k = \sqrt[2N]{1} = e^{j\pi k/N}$ para $k = 0, 1, \dots, 2N-1$

La solución son las $2N$ raíces $2N$ -ésimas de $+1$, las cuales también se encuentran en el círculo de radio unidad.

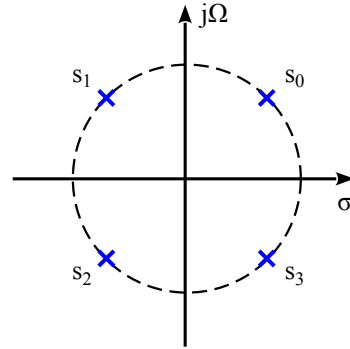
Los polos de la función de transferencia del filtro de Butterworth se corresponden con las soluciones que se encuentran en el semiplano izquierdo. La función de transferencia no tiene ceros.

Sí $\varepsilon \neq 1$, los valores de los polos encontrados precedentemente deben ser multiplicados por $1/\sqrt[N]{\varepsilon}$. Los radios de los círculos sobre los que se encuentran los polos son multiplicados por la misma cantidad.

Ejemplo: $N = 2$, $k = 0, 1, 2, 3$ y $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \angle \pi/4, & s_1 &= 1 \angle 3\pi/4 \\ s_2 &= 1 \angle 5\pi/4, & s_3 &= 1 \angle 7\pi/4 \end{aligned}$$

Los polos de la función de transferencia $H(s)$ se corresponden con las raíces que están en el semiplano izquierdo y de ello resulta que:



$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{[s-(-0,707+j0,707)][s-(-0,707-j0,707)]} = \frac{1}{s^2+1,414s+1}$$

De este modo, se pueden calcular y tabular los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia normalizada.

Determinación del orden N del filtro y de Ω_c

Por definición, $A_{\max \text{ dB}} \leq 20 \log |H(j\Omega)| \leq 0$, $\Omega \leq \Omega_p$

sabemos que: $20 \log |H(j\Omega)| \leq A_{\min \text{ dB}} < 0$, $\Omega \geq \Omega_s$

A partir de la ec. (47), tenemos que la función de transferencia en dB es:

$$|H(j\Omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |H(j\Omega)| = 20 \log \left[\frac{1}{[1 + (\Omega / \Omega_c)^{2N}]^{1/2}} \right] = -10 \log [1 + (\Omega / \Omega_c)^{2N}] \quad (48)$$

$$\text{para } \Omega = \Omega_p, \quad A_{\max \text{ dB}} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \Rightarrow \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right]^{2N} = 10^{-A_{\max \text{ dB}}/10} - 1 \quad (49a)$$

$$\text{para } \Omega = \Omega_s, \quad A_{\min \text{ dB}} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \Rightarrow \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right]^{2N} = 10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1 \quad (49b)$$

de dividir la ec.

$$(49a) \text{ entre la } (49b) \text{ resulta: } \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]^{2N} = \frac{10^{-A_{\max \text{ dB}}/10} - 1}{10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1} \Rightarrow N = \frac{\log \left[\frac{10^{-A_{\max \text{ dB}}/10} - 1}{10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1} \right]}{2 \cdot \log \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]} \quad (50)$$

Reordenando las ec. (49a) y (49b) se obtienen las ec. (51a) y (51b). La frecuencia de corte normalizada Ω_c se puede obtener a partir de cualquiera de ellas.

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{-A_{\max \text{ dB}}/10} - 1)^{1/2N}} \quad (51a)$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1)^{1/2N}} \quad (51b)$$

Respuesta a un escalón

El filtro de Butterworth representa el mejor compromiso entre atenuación y respuesta de fase. La banda de transición es relativamente ancha. El retardo de grupo no es constante, por lo que la respuesta al escalón tiene un sobreimpulso que aumenta con el orden del filtro.

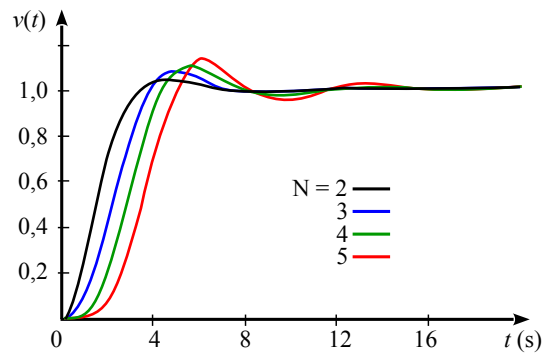


fig. 26

Método de proyecto de un filtro pasabajos de Butterworth

- 1) Determinar el orden N del filtro. Si N es entero tomamos ese valor, de lo contrario usamos el siguiente entero mayor.
- 2) Determinar la Ω_c usando el valor de N hallado. Si fue necesario redondear N , habrá 2 valores diferentes de Ω_c . Si se usa la ec. (51a), se satisfará el requerimiento de atenuación a Ω_p y la atenuación será mayor a Ω_s . Si se usa la ec. (51b), se satisfará exactamente el requerimiento a Ω_s y se excederá a Ω_p .

- 3) Determinar la función de transferencia normalizada del filtro de Butterworth de orden N, ya sea calculándola o tomándola de una tabla, así como el FSF y el Q de cada sección del filtro.
- 4) Determinar la función de transferencia H(s) del filtro pasabajos requerido a partir de la función normalizada H(S) y de la frecuencia de corte ω_c , usando la transformación $H(s) = H(S) \mid S = s/\omega_c$
- 5) Calcular los valores de los componentes necesarios para implementarlo.

Ejemplo: Diseñar un filtro pasabajos de Butterworth con las siguientes características: Banda de paso: $0 \leq f \leq 500$ Hz , $A_{\max} = -1$ dB

Banda de bloqueo: $f > 1$ KHz , $A_{\min} = -15$ dB

$$\omega_p = 2\pi \cdot 500 \text{ Hz}$$

$$\omega_s = 2\pi \cdot 1 \text{ KHz}$$

$$N \geq \frac{\log \left[\frac{10^{-A_{\max} \text{ dB}/10} - 1}{10^{-A_{\min} \text{ dB}/10} - 1} \right]}{2 \cdot \log \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]} = \frac{\log \left[\frac{10^{0,1} - 1}{10^{1,5} - 1} \right]}{2 \cdot \log \left[\frac{1000\pi}{2000\pi} \right]} = 3,443 \Rightarrow N = 4$$

Usando la ec. (51a), se calcula la frecuencia de corte:

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{(10^{-A_{\max}/10} - 1)^{1/2N}} = \frac{1000\pi}{(10^{0,1} - 1)^{1/8}} = 3720 \text{ r/s}$$

De las tablas se desprende, que la función de transferencia normalizada H(S) para un filtro pasabajos de Butterworth de 4° orden es:

$$H(S) = \frac{1}{(s^2 + 0,7654s + 1) \cdot (s^2 + 1,8478s + 1)}$$

Para implementar el filtro activo, el FSF y el Q de cada etapa se pueden deducir de la ecuación anterior o se pueden leer sus valores en la tabla correspondiente.

La función de transferencia H(s) se obtiene mediante la siguiente transformación:

$$H(s) = H(S) \Big|_{S = s/3720 \text{ r/s}} = \frac{1}{(s^2 + 0,7654s + 1) \cdot (s^2 + 1,8478s + 1)} \Big|_{S = s/3720 \text{ r/s}}$$

$$H(s) = \frac{3720^4}{(s^2 + 2847s + 3720^2) \cdot (s^2 + 6873s + 3720^2)}$$

Se pueden determinar ω_o y el Q de cada biquad a partir de la función H(s):

$$\omega_o = \omega_c = 3720 \text{ r/s} \quad Q_1 = \frac{\omega_o}{892} = \frac{3720}{6873} = 0,541 \quad Q_2 = \frac{\omega_o}{892} = \frac{3720}{2847} = 1,307$$

Alternativamente, se pueden leer los valores de Q en la tabla para la aproximación de Butterworth, $FSF = 1$ y usar el $\omega_o = \omega_c = 3720 \text{ r/s}$ ya obtenido:

1^{er} biquad:

$$H = |A_o| = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,5412} = 1,848$$

$$\text{Elegimos } C = 1 \text{ nF} = C_5 \quad \Rightarrow \quad k = \omega_o \cdot C = 3720 \text{ r/s} \cdot 1 \text{ nF} = 3,72 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_o} = \frac{4}{1,848^2} \cdot 2 \cdot \frac{3,72 \cdot 10^{-6}}{3720} = 2,34 \text{ nF} \approx 2,2 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{1,848}{2 \cdot 1 \cdot 3,72 \cdot 10^{-6}} = 248387 \Omega \approx 240 \text{ K}$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{1,848}{2 \cdot 2 \cdot 3,72 \cdot 10^{-6}} = 124193 \Omega \approx 120 \text{ K}$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 1 \cdot 240 \text{ K} = 240 \text{ K}$$

2^o biquad:

$$H = |A_o| = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{1,3065} = 0,765$$

$$\text{Elegimos } C = 1 \text{ nF} = C_5 \quad \Rightarrow \quad k = \omega_o \cdot C = 3720 \text{ r/s} \cdot 1 \text{ nF} = 3,72 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_o} = \frac{4}{0,765^2} \cdot 2 \cdot \frac{3,72 \cdot 10^{-6}}{3720} = 13,67 \text{ nF} \approx 15 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{0,765}{2 \cdot 1 \cdot 3,72 \cdot 10^{-6}} = 102822 \Omega \approx 100 \text{ K}$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{0,765}{2 \cdot 2 \cdot 3,72 \cdot 10^{-6}} = 51411 \Omega \approx 51 \text{ K}$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 1 \cdot 100 \text{ K} = 100 \text{ K}$$

22.5.2 Aproximación de Bessel - Thomson

Esta aproximación está optimizada para obtener una mejor respuesta transitoria gracias a que el retardo de grupo es constante dentro de la banda de paso. En contrapartida, el pasaje de la banda de paso a la banda de rechazo es muy progresivo (la banda de transición tiene un ancho considerable).

Teoremas previos

TM-1 El retardo de grupo de cualquier función de transferencia es una función racional de ω^2

Dem: Consideraremos las funciones de transferencia que sólo tienen polos, aunque el resultado se puede extender para aquellas que también tienen ceros.

$$H(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot s^k}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot (j\omega)^k} = \frac{1}{(1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 + \dots) + j\omega(a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 + \dots)}$$

Lo podemos escribir como: $H(j\omega) = \frac{1}{F_1(\omega^2) + j\omega F_2(\omega^2)}$ con $\angle H(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\omega F_2(\omega^2)}{F_1(\omega^2)} \right]$

Donde F_1 y F_2 son polinomios pares en ω . Por definición, el retardo de grupo es:

$$\tau_y = -\frac{d\angle H(j\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{1 + \left[\frac{\omega F_2(\omega^2)}{F_1(\omega^2)} \right]^2} \cdot \frac{d \left[\frac{\omega F_2(\omega^2)}{F_1(\omega^2)} \right]}{d\omega}$$

El 1^{er} término es par y si se deriva el 2^o, se comprobará que también es par. El retardo de grupo es entonces el producto de fracciones racionales en ω^2 y por lo tanto es también una fracción racional en ω^2 .

TM-2 Sí $H(j\omega) = \frac{1}{x + jy}$, donde x e y son dos polinomios en ω , el retardo

de grupo τ_y estará dado por la expresión:

$$\tau_y = \frac{x \frac{dy}{d\omega} - y \frac{dx}{d\omega}}{x^2 + y^2}$$

La aproximación de Bessel-Thomson debe cumplir las siguientes condiciones:

- La función de transferencia debe tener solamente polos
- La linealidad de la fase debe ser máxima en $\omega = 0$
- $\left. \frac{d\angle H(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -1 \Rightarrow \tau_y = -\frac{d\angle H(j\omega)}{d\omega} = 1 \text{ a } \omega = 0$

Supongamos una función de transferencia $H(s)$ tal que:

$$H(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot s^k} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 + \dots) + j\omega(a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 + \dots)}$$

Por el TM-2,

$$\text{tenemos que: } \tau_y = \frac{a_1 + \omega^2(a_1 a_2 - 3a_3) + \omega^4(5a_5 - 3a_1 a_4 + a_2 a_3) + \dots}{1 + \omega^2(a_1^2 - 2a_2) + \omega^4(a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) + \dots}$$

a) Como $\tau_y = 1$ a $\omega = 0$, de ello resulta que $a_1 = 1$

b) Para que τ_y sea lo más constante posible a $\omega = 0$, la mayor cantidad posible de coeficientes en el numerador y el denominador, comenzando por la potencia más baja de ω^2 , deben ser iguales:

$$\text{Para términos en } \omega^2: a_1 \cdot a_2 - 3a_3 = a_1^2 - 2a_2$$

$$\text{Para términos en } \omega^4: 5a_5 - 3a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_3 = a_2^2 - 2a_1 \cdot a_3 + 2a_4$$

..... :

Resolviendo para distintos valores

de N , obtenemos los coeficientes:

N	a_0	a_1	a_2	a_3
1	1	1		
2	1	1	1/3	
3	1	1	2/5	1/15

Estos coeficientes también se pueden obtener a partir del siguiente conjunto de polinomios, los cuales reciben el nombre de Funciones de Bessel:

$$B_1 = s + 1$$

$$B_2 = s^2 + 3s + 3$$

...

$$B_k = (2k-1)B_{k-1} + s^2 B_{k-2}$$

La aproximación de Thomson¹ de orden N está dada por la ecuación:

$$H_N(s) = \frac{B_N(0)}{B_N(s)} \quad (52)$$

¹ W. E. Thomson – Ingeniero del Post Office Research Department

De la aproximación de Thomson resulta directamente un polinomio en s y no un conjunto de polos. Las funciones de transferencia definidas por la ec. (52) deben además ser normalizadas en frecuencia, de modo que $20 \cdot \log |H(\omega_0)| = -3 \text{ dB}$

N	Denominadores normalizados
2	$0,618 \cdot s^2 + 1,362 \cdot s + 1$
3	$0,361 \cdot s^3 + 1,233 \cdot s^2 + 1,756 \cdot s + 1$

A efectos de su uso para proyectar filtros como una cascada de celdas de 1^{er} y 2^o orden, estos polinomios se suelen tabular como un producto de polinomios.

No existe un método analítico para determinar el orden que debe tener un polinomio de Bessel para que la función de transferencia del filtro se acomode a la plantilla construida a partir de los requerimientos. Se lo debe determinar por aproximaciones sucesivas o simplemente mediante una representación gráfica.

Respuesta a un escalón

Para preservar la *forma* de la señal, todas las componentes deberían atravesar el filtro con el mismo factor de ganancia y el mismo retardo. Si bien a las frecuencias altas se observa una caída gradual de $|H(\omega)|$, lo que causa un “redondeado” de la gráfica, el retardo de grupo es prácticamente constante y por lo tanto la respuesta al escalón no tiene sobreimpulso.

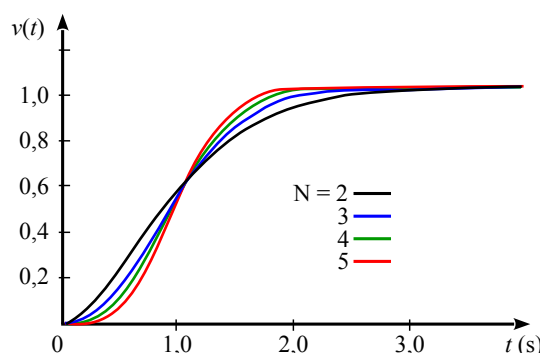


fig. 27

Ejemplo

Proyectar un filtro pasabajos de 4^o orden MFB con las siguientes características: $A_0 = 1$, frecuencia de corte de -3 dB $f_2 = 3,3 \text{ KHz}$, respuesta de Bessel

De las tablas de valores de FSF y Q tenemos que para respuesta de Bessel:

1^{er} biquad: $Q = 0,5219$ y $FSF = 1,4192$

2^o biquad: $Q = 0,8055$ y $FSF = 1,5912$

1^{er} biquad:

$$H = |A_0| = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,5219} = 1,916$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 1,4192 = 29426 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 1 \text{ nF} = C_5 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 29426 \text{ r/s} \cdot 1 \text{ nF} = 2,9426 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0} = \frac{4}{1,916^2} \cdot 2 \cdot \frac{2,9426 \cdot 10^{-5}}{29426} = 2,18 \text{ nF} \approx 2,2 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{1,916}{2 \cdot 1 \cdot 2,9426 \cdot 10^{-5}} = 32556 \Omega \approx 33 \text{ K}$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{1,916}{2 \cdot 2 \cdot 2,9426 \cdot 10^{-5}} = 16278 \Omega \approx 16 \text{ K}$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 1 \cdot 33 \text{ K} = 33 \text{ K}$$

2^o biquad:

$$H = |A_0| = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,8055} = 1,24$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 1,5912 = 32993 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 2,2 \text{ nF} = C_5 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 32993 \text{ r/s} \cdot 2,2 \text{ nF} = 7,258 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0} = \frac{4}{1,24^2} \cdot 2 \cdot \frac{7,258 \cdot 10^{-5}}{32993} = 11,44 \text{ nF} \approx 12 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{1,24}{2 \cdot 1 \cdot 7,258 \cdot 10^{-5}} = 8542 \Omega \approx 8 \text{ K } 2$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{1,24}{2 \cdot 2 \cdot 7,258 \cdot 10^{-5}} = 4271 \Omega \approx 4 \text{ K } 3$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 1 \cdot 8,2 \text{ K} = 8 \text{ K } 2$$

22.5.3 Aproximación de Chebyshev

La aproximación de Chebyshev, a diferencia de la de Butterworth, presenta una ondulación dentro de la banda de paso. Ésto permite obtener un pasaje más rápido de la banda de paso a la de rechazo, para un filtro del mismo orden.

El módulo de la función de transferencia normalizada de estos filtros es:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega)}} \quad (53)$$

Donde:

ϵ : amplitud de la ondulación en la banda pasante

Ω : frecuencia angular normalizada

N : orden del filtro

$C_N^2(\Omega)$: cuadrado de un polinomio de Chebyshev, los cuales se definen por las expresiones:

$$C_N(\Omega) = \begin{cases} \cos[N \cdot \cos^{-1}(\Omega)] & \text{para } \Omega \leq 1 \\ \cosh[N \cdot \cosh^{-1}(\Omega)] & \text{para } \Omega \geq 1 \end{cases}$$

En base a las ecuaciones anteriores, podemos hacer las siguientes observaciones respecto a las características de la respuesta de frecuencia de estos filtros:

1) Para $\Omega \leq 1$, estos polinomios toman valores que oscilan entre ± 1

Para $\Omega > 1$, son monótonamente crecientes

2) Para $\Omega = 0$, el polinomio $C_N(\Omega)$ toma valor ± 1 o 0

$$C_N(0) = \cos[N \cdot \cos^{-1}(0)] = \cos[N(2k+1)\frac{\pi}{2}] = \begin{cases} \pm 1 & \text{para } N \text{ par} \\ 0 & \text{para } N \text{ impar} \end{cases}$$

3) Para $\Omega = 1$, tenemos que $C_N(1) = 1 \Rightarrow |H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$

4) Para N par, $|H(0)| = |H(1)|$

Determinación de los polos

El cuadrado de la función de transferencia normalizada es:

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega)}$$

Sustituyendo $\Omega = s/j$

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(s/j)}$$

El denominador sólo puede tener valor cero para $\Omega \leq 1$. Sustituyendo C_N por su expresión, tenemos que los polos serán aquellas soluciones de la ec. (54) que estén situadas en el semiplano

izquierdo del plano complejo:

$$1 + \epsilon^2 \cos^2[N \cdot \cos^{-1}(s/j)] = 0 \quad (54)$$

Supongamos que s_k sea una raíz de la ec. (54), entonces podemos escribir:

$$\cos^{-1}\left(\frac{s_k}{j}\right) = a_k + j b_k \quad \Rightarrow \quad \frac{s_k}{j} = \cos[\cos^{-1}\left(\frac{s_k}{j}\right)] = \cos(a_k + j b_k)$$

Sí le aplicamos las identidades: $\cos(x + j y) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - j \sin(x) \cdot \sinh(y)$
 $\sin(j x) = j \sinh(x)$, $\cos(j x) = \cosh x$

Se obtiene la expresión $s_k = \sin(a_k) \cdot \sinh(b_k) + j \cos(a_k) \cdot \cosh(b_k)$ (55)

Sustituyendo en la ec. (54) $\cos^{-1}(s_k/j)$ por $a_k + j b_k$ y operando se obtiene:

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2(N \cdot a_k + j N \cdot b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(N \cdot a_k + j N \cdot b_k) = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

Desarrollando el coseno:

$$\cos(N \cdot a_k) \cdot \cosh(N \cdot b_k) - j \sin(N \cdot a_k) \cdot \sinh(N \cdot b_k) = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

La parte Real es 0 , pero además sabemos que $\cosh(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \cos(N \cdot a_k) \cdot \cosh(N \cdot b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(N \cdot a_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{N}(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

Sabemos que $\cos(N \cdot a_k) = 0 \Rightarrow \sin(N \cdot a_k) = 1$ y que $\sinh(x)$ es impar

$$\sin(N \cdot a_k) \cdot \sinh(N \cdot b_k) = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad b_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = v \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N$$

Nótese que b_k no depende del índice k . Sustituyendo en la ec. (55) tenemos que:

$$s_k = \sin\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sinh\left[\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] + j \cos\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cosh\left[\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \quad (56)$$

Las partes Real e Imaginaria son las coordenadas σ_k y Ω_k en el plano S:

$$\sigma_k = \sin\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sinh(v) \quad , \quad \Omega_k = \cos\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cosh(v) \quad (56b)$$

Las raíces satisfacen la ecuación de una elipse centrada en el origen del plano S:

$$\left[\frac{\sigma_k}{\sinh(v)}\right]^2 + \left[\frac{\Omega_k}{\cosh(v)}\right]^2 = 1 \quad (57)$$

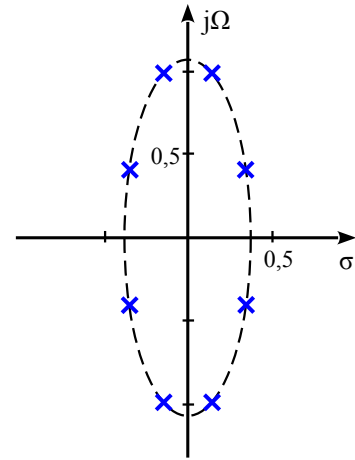
Ejemplo: $N = 4$, $k = 0, 1, \dots, 7$ y $A_{\max} = -1$ dB

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-0,1(-1\text{dB})} - 1} = 0,5088$$

$$\sinh(v) = 0,365 \quad , \quad \cosh(v) = 1,064$$

Aplicando las fórmulas de la ec. (56b):

$$\begin{aligned} s_0 &= -0,14 + j0,98 & , & \quad s_1 = 0,14 + j0,98 \\ s_2 &= 0,34 + j0,41 & , & \quad s_3 = 0,34 - j0,41 \\ s_4 &= 0,14 - j0,98 & , & \quad s_5 = -0,14 - j0,98 \\ s_6 &= -0,34 - j0,41 & , & \quad s_7 = -0,34 + j0,41 \end{aligned}$$



Los polos de la función de transferencia $H(s)$ se corresponden con las raíces que están en el semi-plano izquierdo. Por ser N par, $|H(0)| = |H(1)| \Rightarrow |H(0)| = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2} = 0,89125$

La función de transferencia normalizada resultante es:

$$H(s) = \frac{0,89125}{(3,52s^2 + 2,43s + 1) \cdot (1,02s^2 + 0,286s + 1)}$$

Determinación del orden N del filtro

Por definición, sabemos que: $20 \log |H(j\Omega)| \leq A_{\min \text{ dB}} < 0 \quad , \quad \Omega \geq \Omega_s$

Por la ec. (53), en la banda de rechazo la función de transferencia en dB es:

$$|H(j\Omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |H(j\Omega)| = 20 \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 [\cosh(N \cdot \cosh^{-1}(\Omega_s))]}^2} \right\} \leq A_{\min \text{ dB}} \quad (58)$$

Por propiedades de los logaritmos

$$|H(j\Omega)|_{\text{dB}} = 10 \log \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [\cosh(N \cdot \cosh^{-1}(\Omega_s))]}^2 \right\} \leq A_{\min \text{ dB}}$$

Igualando a $A_{\min \text{ dB}}$ y hallando el antilogaritmo en base 10

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [\cosh(N \cdot \cosh^{-1}(\Omega_s))]}^2 = 10^{A_{\min \text{ dB}} / 10}$$

Despejando N , el orden del filtro se calcula mediante la ec. (59):

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{-A_{\min \text{ dB}} / 10} - 1}{\varepsilon^2}}}{\cosh^{-1}(\Omega_s)} \quad (59)$$

Respuesta a un escalón

El filtro de Chebyshev tiene un retardo de grupo que no es constante, la respuesta al escalón presenta un sobreimpulso mayor que el filtro de Butterworth, el cual aumenta con el orden del filtro. Esta distorsión de fase puede ser tolerable en audio, pero afectará negativamente a las aplicaciones de video y de pulsos.

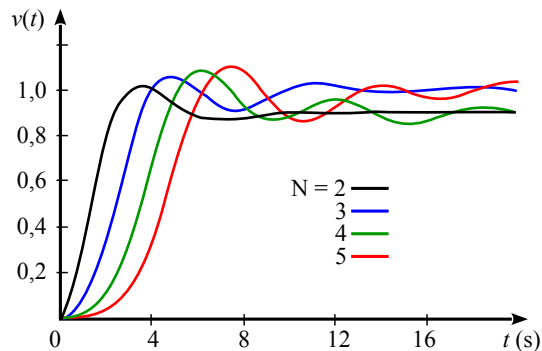


fig. 28

Ejemplo

Proyectar un filtro pasabajos MFB con respuesta de Chebyshev de tipo I con:

$$|A_o| = 1, f_2 = 3,3 \text{ KHz}, A_{\max \text{ dB}} = -1 \text{ dB}, f_s = 5 \text{ KHz}, A_{\min \text{ dB}} = -20 \text{ dB}$$

Por la ec. (45) $\epsilon = \sqrt{10^{-0,1 A_{\max}} - 1} = \sqrt{10^{-0,1(-1\text{dB})} - 1} = 0,5088$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_2} = \frac{f_s}{f_2} = \frac{5 \text{ KHz}}{3,3 \text{ KHz}} = 1,5$$

Por la ec.(59)
$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1}{\epsilon^2}}}{\cosh^{-1}(\Omega_s)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^2 - 1}{0,5088^2}}}{\cosh^{-1}(1,5)} = 3,81 \Rightarrow N = 4$$

Por ser N par, $|H(0)| = |H(1)| \Rightarrow |H(0)| = 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2} = 0,89125$

Repartiremos la ganancia de tensión por igual entre ambos biquads, eligiendo

$$H = \sqrt{H(0)} = \sqrt{0,89125} = 0,944$$

De las tablas para la respuesta de Chebyshev de tipo I con una ondulación de 1dB dentro de la banda de paso obtenemos:

1^{er} biquad: $Q = 0,7845$ y $FSF = 0,5286$

2^o biquad: $Q = 3,5600$ y $FSF = 0,9932$

1^{er} biquad:

$$H = 0,944 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,7845} = 1,275$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 0,5286 = 10960 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 2,2 \text{ nF} = C_5 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 10960 \text{ r/s} \cdot 2,2 \text{ nF} = 2,41 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0} = \frac{4}{1,275^2} \cdot 1,944 \cdot \frac{2,41 \cdot 10^{-5}}{10960} = 10,52 \text{ nF} \approx 10 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{1,275}{2 \cdot 0,944 \cdot 2,41 \cdot 10^{-5}} = 28021 \Omega \approx 27 \text{ K}$$

$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{1,275}{2 \cdot 1,944 \cdot 2,41 \cdot 10^{-5}} = 13607 \Omega \approx 13 \text{ K}$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 0,944 \cdot 27 \text{ K} = 25488 \Omega \approx 27 \text{ K}$$

2^o biquad:

$$H = 0,944 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{3,56} = 0,281$$

$$\omega_0 = 2\pi f_2 \cdot FSF = 2\pi \cdot 3,3 \text{ KHz} \cdot 0,9932 = 20594 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 1 \text{ nF} = C_5 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 20594 \text{ r/s} \cdot 1 \text{ nF} = 2,059 \cdot 10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} (H+1) \frac{k}{2\pi f_0} = \frac{4}{0,281^2} \cdot 1,944 \cdot \frac{2,059 \cdot 10^{-5}}{20594} = 98,46 \text{ nF} \approx 100 \text{ nF}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{2Hk} = \frac{0,281}{2 \cdot 0,944 \cdot 2,059 \cdot 10^{-5}} = 7228 \Omega \approx 7 \text{ K } 5$$

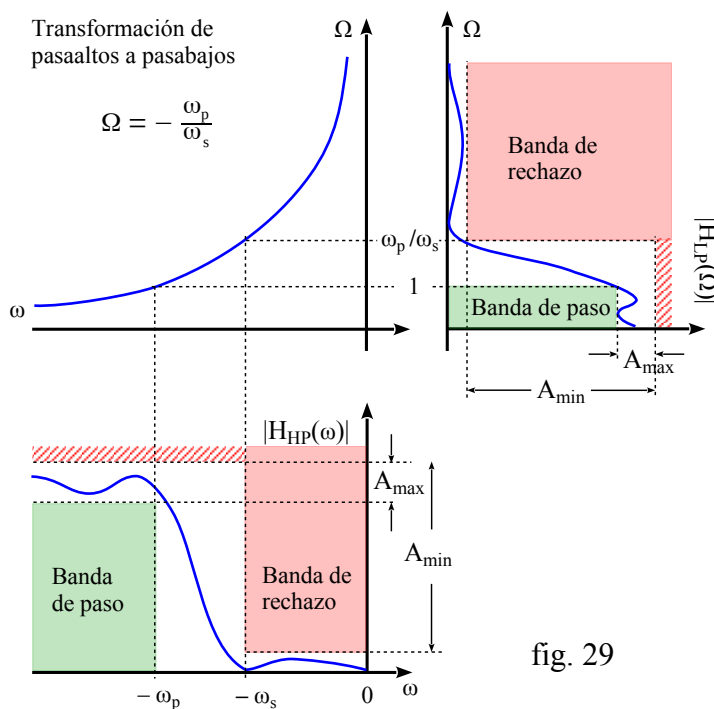
$$R_3 = \frac{\alpha}{2(H+1)k} = \frac{0,281}{2 \cdot 1,944 \cdot 2,059 \cdot 10^{-5}} = 3510 \Omega \approx 3 \text{ K } 6$$

$$R_4 = H \cdot R_1 = 0,944 \cdot 7,5 \text{ K} = 7,08 \text{ K} \approx 6 \text{ K } 8$$

22.6 Transformaciones de frecuencia

Un procedimiento usual para proyectar filtros analógicos, consiste en transformar la especificación deseada en la especificación normalizada de un filtro pasabajos prototipo. O sea, mediante una transformación de frecuencia se mapea la respuesta de frecuencia requerida en la respuesta de un filtro pasabajos. En base a las especificaciones transformadas, se diseña un filtro pasabajos normalizado, cuya función de transferencia $H(S)$ es luego transformada al dominio de la frecuencia original. Para comprender mejor la idea, pensemos en la curva de respuesta de frecuencia de un filtro pasabajos, usando para las frecuencias un eje logarítmico; Si se hace una simetría axial tomando como eje la frecuencia de corte (lo cual sustituye ω por $1/\omega$), se obtiene la curva de respuesta de un filtro pasaaltos.

22.6.1 Transposición prototipo $\Leftrightarrow$ pasaaltos



La transformación de frecuencia que convierte a la función de transferencia $H(S)$ del filtro prototipo en un filtro pasaaltos con función de transferencia $H(s)$ es:

$$S = \frac{\omega_p}{s} \quad (60)$$

donde:

$$S = \gamma + j\Omega$$

$$s = \sigma + j\omega$$

ω_p = frecuencia de corte del pasaaltos

En estado senoidal permanente, tenemos: $\Omega = -\frac{\omega_p}{\omega}$ o $\omega = -\frac{\omega_p}{\Omega}$ (61)

Ej.: De aplicar la transposición a un pasaaltos de 1^{er} orden resulta:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega_p/j\omega} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

Método de proyecto de un filtro pasaaltos

- 1) Determinar la banda de bloqueo del filtro pasabajos normalizado: $\Omega_s = \frac{\omega_p}{\omega_s}$
- 2) Determinar el orden N del filtro pasabajos normalizado.
- 3) Determinar la frecuencia de corte ω_c .
- 4) Determinar la función de transferencia normalizada H(S) del filtro pasabajos prototipo.
- 5) Determinar la función de transferencia H(s) del filtro pasaaltos requerido a partir de la función de transferencia normalizada H(S) y de la frecuencia ω_c , usando la transformación: $H(s) = H(S) \mid S = \omega_p / \Omega_c \cdot s$
- 5) Calcular los valores de los componentes necesarios para implementarlo.

Ejemplo: Diseñar un filtro pasaaltos de Butterworth con las siguientes características: Banda de paso: $f \geq 100 \text{ Hz}$, $A_{\max} = -1\text{dB}$

Banda de bloqueo: $f < 50 \text{ Hz}$, $A_{\min} = -15 \text{ dB}$

$$\Omega_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 2 \text{ r/s}$$

$$N \geq \frac{\log \left[\frac{10^{-A_{\max}/10} - 1}{10^{-A_{\min}/10} - 1} \right]}{2 \cdot \log \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]} = \frac{\log \left[\frac{10^{0,1} - 1}{10^{1,5} - 1} \right]}{2 \cdot \log \left[\frac{1 \text{ r/s}}{2 \text{ r/s}} \right]} = 3,443 \Rightarrow N = 4$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(10^{-A_{\min}/10} - 1)^{1/2N}} = \frac{2 \text{ r/s}}{(10^{1,5} - 1)^{1/8}} = 1,3 \text{ r/s}$$

De las tablas se desprende, que la función de transferencia normalizada H(S) para un filtro pasabajos de Butterworth de 4º orden es:

$$H(S) = \frac{1}{(S^2 + 0,7654 \cdot S + 1) \cdot (S^2 + 1,8478 \cdot S + 1)}$$

$$H(s) = H(S) \mid_{S = \omega_p / s \cdot \Omega_c} = \frac{1}{(S^2 + 0,7654 \cdot S + 1) \cdot (S^2 + 1,8478 \cdot S + 1)} \mid_{S = 2\pi 100 \text{ Hz} / s \cdot 1,3 \text{ r/s}}$$

$$H(s) = \frac{s^4}{(s^2 + 369,7s + 483^2) \cdot (s^2 + 892s + 483^2)}$$

Se pueden determinar ω_o y el Q de cada biquad a partir de la función H(s):

$$\omega_o = 483 \text{ r/s} \quad Q_1 = \frac{\omega_o}{892} = \frac{483}{892} = 0,541 \quad Q_2 = \frac{\omega_o}{369,7} = \frac{483}{369,7} = 1,306$$

Alternativamente, se pueden leer los valores de Q en la tabla para la aproximación de Butterworth y obtener ω_o aplicando directamente la transformación a Ω_c :

$$\omega_o = \frac{\omega_p}{\Omega_c} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{1,3} = 483,3 \text{ r/s} \quad FSF = 1$$

1^{er} biquad:

$$H = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,5412} = 1,848$$

$$\text{Elegimos } C = 10 \text{ nF} = C_1 = C_3 \Rightarrow k = \omega_o \cdot C = 483,3 \text{ r/s} \cdot 10 \text{ nF} = 4,833 \cdot 10^{-6}$$

$$C_4 = \frac{C}{H} = \frac{10 \text{ nF}}{1} = 10 \text{ nF}$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{k(2 + 1/H)} = \frac{1,848}{4,833 \cdot 10^{-6} \cdot (2 + 1/1)} = 127457 \Omega \approx 120 \text{ K}$$

$$R_5 = \frac{H(2 + 1/H)}{\alpha k} = \frac{1(2 + 1/1)}{1,848 \cdot 4,833 \cdot 10^{-6}} = 335894 \Omega \approx 330 \text{ K}$$

2^o biquad:

$$H = 1 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{1,3065} = 0,765$$

$$\text{Elegimos } C = 22 \text{ nF} = C_1 = C_3 \Rightarrow k = \omega_o \cdot C = 483,3 \text{ r/s} \cdot 22 \text{ nF} = 1,06 \cdot 10^{-5}$$

$$C_4 = \frac{C}{H} = \frac{22 \text{ nF}}{1} = 22 \text{ nF}$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{k(2 + 1/H)} = \frac{0,765}{1,06 \cdot 10^{-5} \cdot (2 + 1/1)} = 24056 \Omega \approx 24 \text{ K}$$

$$R_5 = \frac{H(2 + 1/H)}{\alpha k} = \frac{1(2 + 1/1)}{0,765 \cdot 1,06 \cdot 10^{-5}} = 369959 \Omega \approx 360 \text{ K}$$

Ejemplo: Diseñar un filtro pasaaltos de Chebyshev MFB con las siguientes características: Banda de paso: $f \geq 100 \text{ Hz}$, $A_{\max} = -1 \text{ dB}$

Banda de bloqueo: $f < 50 \text{ Hz}$, $A_{\min} = -30 \text{ dB}$

Por la ec. (45) $\epsilon = \sqrt{10^{-0,1 A_{\max}} - 1} = \sqrt{10^{-0,1(-1 \text{ dB})} - 1} = 0,5088$

Por la ec. (61) $\Omega_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 2 \text{ r/s}$

Por la ec.(59) $N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{-A_{\min \text{ dB}}/10} - 1}{\epsilon^2}}}{\cosh^{-1}(\Omega_s)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^3 - 1}{0,5088^2}}}{\cosh^{-1}(2)} = 3,66 \Rightarrow N = 4$

Por ser N par, $|H(0)| = |H(1)| \Rightarrow |H(0)| = 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2} = 0,89125$

Repartiremos la ganancia de tensión por igual entre ambos biquads, eligiendo

$$H = \sqrt{H(0)} = \sqrt{0,89125} = 0,944$$

De las tablas para la respuesta de Chebyshev de tipo I con una ondulación de 1dB dentro de la banda de paso obtenemos:

1^{er} biquad: $Q = 0,7845$ y $FSF = 0,5286$

2^o biquad: $Q = 3,5600$ y $FSF = 0,9932$

Para cada biquad del filtro pasabajos prototipo, $\Omega_o = FSF \cdot \Omega_p = FSF \cdot 1$

Aplicando la transformación de frecuencia, obtenemos $\omega_o = \frac{\omega_p}{\Omega_o} = \frac{\omega_p}{FSF}$

1^{er} biquad:

$$H = 0,944 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0,7845} = 1,275$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_2}{FSF} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{0,5286} = 1189 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 47 \text{ nF} = C_1 = C_3 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 1189 \text{ r/s} \cdot 47 \text{ nF} = 5,588 \cdot 10^{-5}$$

$$C_4 = \frac{C}{H} = \frac{47 \text{ nF}}{0,944} = 49,79 \text{ nF} \approx 47 \text{ nF}$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{k(2 + 1/H)} = \frac{1,275}{5,588 \cdot 10^{-5} \cdot (2 + 1/0,944)} = 7458 \Omega \approx 7 \text{ K } 5$$

$$R_5 = \frac{H(2 + 1/H)}{\alpha k} = \frac{0,944(2 + 1/0,944)}{1,275 \cdot 5,588 \cdot 10^{-5}} = 40535 \Omega \approx 39 \text{ K}$$

2^o biquad:

$$H = 0,944 \quad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{1}{3,56} = 0,281$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_2}{FSF} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{0,9932} = 632,6 \text{ r/s}$$

$$\text{Elegimos } C = 68 \text{ nF} = C_1 = C_3 \Rightarrow k = \omega_0 \cdot C = 632,6 \text{ r/s} \cdot 68 \text{ nF} = 4,3 \cdot 10^{-5}$$

$$C_4 = \frac{C}{H} = \frac{68 \text{ nF}}{0,944} = 72,03 \text{ nF} \approx 68 \text{ nF}$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{k(2 + 1/H)} = \frac{0,281}{4,3 \cdot 10^{-5} \cdot (2 + 1/0,944)} = 2136 \Omega \approx 2 \text{ K } 2$$

$$R_5 = \frac{H(2 + 1/H)}{\alpha k} = \frac{0,944(2 + 1/0,944)}{0,281 \cdot 4,3 \cdot 10^{-5}} = 239013 \Omega \approx 240 \text{ K}$$

22.7 Tablas

22.7.1 Aproximación de Butterworth

N	Denominador de la función de transferencia H(s) del filtro de Butterworth
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + 1,414 s + 1)$
3	$(s + 1) (s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0,7654 s + 1) (s^2 + 1,8478 s + 1)$
5	$(s + 1) (s^2 + 0,6810 s + 1) (s^2 + 1,6810 s + 1)$
6	$(s^2 + 0,5176 s + 1) (s^2 + 1,4142 s + 1) (s^2 + 1,9319 s + 1)$
7	$(s + 1) (s^2 + 0,4450 s + 1) (s^2 + 1,2470 s + 1) (s^2 + 1,8019 s + 1)$
8	$(s^2 + 0,3902 s + 1) (s^2 + 1,1111 s + 1) (s^2 + 1,6629 s + 1) (s^2 + 1,9616 s + 1)$
9	$(s + 1) (s^2 + 0,3473 s + 1) (s^2 + s + 1) (s^2 + 1,5321 s + 1) (s^2 + 1,8974 s + 1)$
10	$(s^2 + 0,3129 s + 1) (s^2 + 0,9080 s + 1) (s^2 + 1,4142 s + 1) (s^2 + 1,7820 s + 1) (s^2 + 1,9754 s + 1)$

Butterworth Filter Table

Filter Order	Stage 1		Stage 2		Stage 3		Stage 4		Stage 5	
	FSF	Q	FSF	Q	FSF	Q	FSF	Q	FSF	Q
2	1.000	0.7071								
3	1.000	1.0000	1.000							
4	1.000	0.5412	1.000	1.3065						
5	1.000	0.6180	1.000	1.6181	1.000					
6	1.000	0.5177	1.000	0.7071	1.000	1.9320				
7	1.000	0.5549	1.000	0.8019	1.000	2.2472	1.000			
8	1.000	0.5098	1.000	0.6013	1.000	0.8999	1.000	2.5628		
9	1.000	0.5321	1.000	0.6527	1.000	1.0000	1.000	2.8802	1.000	
10	1.000	0.5062	1.000	0.5612	1.000	0.7071	1.000	1.1013	1.000	3.1969

22.7.2 Aproximación de Bessel

Bessel Filter Table

Filter Order	Stage 1		Stage 2		Stage 3		Stage 4		Stage 5	
	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>
2	1.2736	0.5773								
3	1.4524	0.6910	1.3270							
4	1.4192	0.5219	1.5912	0.8055						
5	1.5611	0.5635	1.7607	0.9165	1.5069					
6	1.6060	0.5103	1.6913	0.6112	1.9071	1.0234				
7	1.7174	0.5324	1.8235	0.6608	2.0507	1.1262	1.6853			
8	1.7837	0.5060	2.1953	1.2258	1.9591	0.7109	1.8376	0.5596		
9	1.8794	0.5197	1.9488	0.5894	2.0815	0.7606	2.3235	1.3220	1.8575	
10	1.9490	0.5040	1.9870	0.5380	2.0680	0.6200	2.2110	0.8100	2.4850	1.4150

22.7.3 Aproximación de Chebyshev

1-dB Chebyshev Filter Table

Filter Order	Stage 1		Stage 2		Stage 3		Stage 4		Stage 5	
	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>
2	1.0500	0.9565								
3	0.9971	2.0176	0.4942							
4	0.5286	0.7845	0.9932	3.5600						
5	0.6552	1.3988	0.9941	5.5538	0.2895					
6	0.3532	0.7608	0.7468	2.1977	0.9953	8.0012				
7	0.4800	1.2967	0.8084	3.1554	0.9963	10.9010	0.2054			
8	0.2651	0.7530	0.5838	1.9564	0.5538	2.7776	0.9971	14.2445		
9	0.3812	1.1964	0.6623	2.7119	0.8805	5.5239	0.9976	18.0069	0.1593	
10	0.2121	0.7495	0.4760	1.8639	0.7214	3.5609	0.9024	6.9419	0.9981	22.2779

3-dB Chebyshev Filter Table

Filter Order	Stage 1		Stage 2		Stage 3		Stage 4		Stage 5	
	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>	<i>FSF</i>	<i>Q</i>
2	0.8414	1.3049								
3	0.9160	3.0678	0.2986							
4	0.4426	1.0765	0.9503	5.5770						
5	0.6140	2.1380	0.9675	8.8111	0.1775					
6	0.2980	1.0441	0.7224	3.4597	0.9771	12.7899				
7	0.4519	1.9821	0.7920	5.0193	0.9831	17.4929	0.1265			
8	0.2228	1.0558	0.5665	3.0789	0.8388	6.8302	0.9870	22.8481		
9	0.3559	1.9278	0.6503	4.3179	0.8716	8.8756	0.9897	28.9400	0.0983	
10	0.1796	1.0289	0.4626	2.9350	0.7126	5.7012	0.8954	11.1646	0.9916	35.9274

Bibliografia

Gérard Mangiante, Analyse et synth se des filtres actifs analogiques

F. E. J. Girling, E. F. Good, Active Filters – Wireless World, August 1969 – December 1970

S. Butterworth, On the Theory of Filter Amplifiers – Exp. Wireless & Wireless Eng., October 1930

Bruce Carter, L. P. Huelsman, Handbook of Operational Amplifier Active RC Networks – Texas Instruments SBOA093A

Jim Karki, Active Low-Pass Filter Design - Texas Instruments SLOA049d

R. P. Sallen and E. L. Key, “A Practical Method of Designing RC Active Filters” - IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-2, No. 1, March 1955.

James Karki, Analysis of the Sallen-Key Architecture - Texas Instruments SLOA024B

V. D. Landon, Cascade Amplifiers with Maximal Flatness - RCA Review, January & April 1941

Mrinal Mandal, Amir Asif, Continuous and Discrete Time Signals and Systems

Hank Zumbahlen, Basic Linear Design (cap. 8) – Analog Devices Inc., 2007

Randy Geiger, EE 508 Lecture notes – Iowa State University