

21. Frecuencia compleja

Ing. Fernando Ubiría

En el cap. 7 se introdujo el concepto de *función de transferencia*. En el cap. 8 se introdujo el concepto de *respuesta de frecuencia*, estudiando el efecto de los filtros de 1^{er} orden en el comportamiento de una etapa amplificadora y el caso particular de una cascada de n etapas amplificadoras cuyas frecuencias de corte son iguales. En el cap. 10 se trató en forma general la realimentación. Todos estos estudios se llevaron a cabo utilizando señales de excitación senoidales.

Para estudiar el comportamiento de un sistema cuya respuesta de frecuencia tiene una forma más compleja, se recurre al concepto de *frecuencia compleja*, el cual es parte de la *Teoría de Circuitos*.

21.1 Definición

Desde el punto de vista matemático, se dice que cualquier función que pueda escribirse en la forma:

$$f(t) = \mathbf{K} e^{\mathbf{s}t} \quad (1)$$

donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{s}$ son constantes complejas, está caracterizada por la *frecuencia compleja* $\mathbf{s}$. La frecuencia compleja $\mathbf{s}$ es simplemente el factor que multiplica a t en esta representación exponencial compleja.

A partir de esta definición y dependiendo de la forma de $\mathbf{s}$, veamos como son las diferentes funciones de excitación que se pueden obtener:

- i) $\mathbf{s} = 0$, $v(t) = V_0 e^{0 \cdot t} = V_0$ es una tensión continua

La frecuencia compleja de una tensión o corriente constante (DC) es 0

- ii) $\mathbf{s} = \sigma + j0$, $v(t) = V_0 e^{\sigma t}$ es una función exponencial

La función será creciente o decreciente dependiendo del signo de σ

iii) $s = j\omega$

Recordemos primero que $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \Rightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta$
 por la fórmula de Euler: $e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$

Consideremos la señal senoidal $v(t)$ y apliquemos en ella la fórmula anterior:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2} V_m (e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}) = \left(\frac{V_m}{2} e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{V_m}{2} e^{-j\theta}\right) e^{-j\omega t}$$

Tenemos la suma de dos exponenciales complejas con dos frecuencias complejas $\Rightarrow v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

Los dos valores de s son conjugados: $s_1 = j\omega$, $s_2 = -j\omega \Rightarrow s_2 = s_1^*$

y los dos valores de K también son conjugados: $K_1 = \frac{V_m}{2} e^{j\theta}$, $K_2 = K_1^* = \frac{V_m}{2} e^{-j\theta}$

Por lo tanto, el 1º y el 2º término son conjugados, lo cual era de esperarse, ya que la suma debe ser una cantidad real.

iv) $s = \sigma + j\omega$

Consideremos la señal senoidal exponencialmente amortiguada: $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$

Aplicando a $v(t)$ la fórmula de Euler se obtiene:

$$v(t) = \frac{1}{2} V_m e^{\sigma t} (e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}) = \left(\frac{V_m}{2} e^{j\theta}\right) e^{(\sigma + j\omega)t} + \left(\frac{V_m}{2} e^{-j\theta}\right) e^{(\sigma - j\omega)t}$$

Se necesita un par de frecuencias complejas conjugadas para describir la senoidal exponencialmente amortiguada $s_1 = \sigma + j\omega$, $s_2 = s_1^* = \sigma - j\omega$

En general, ni σ ni ω son cero. Las tensiones constantes, la función exponencial creciente o decreciente y la señal senoidal son casos particulares. El caso general es el de una onda senoidal cuya amplitud varía exponencialmente. La parte real de s está asociada con la variación exponencial, cuanto mayor sea, más rápido será el crecimiento o decrecimiento exponencial.

$$s = \sigma + j\omega \quad (2)$$

La parte imaginaria de s representa la frecuencia angular.

21.2 La función de excitación senoidal amortiguada

Sea una señal senoidal general, con variación de amplitud exponencial:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (3)$$

Usando la fórmula de Euler, la misma también se puede expresar en términos de la frecuencia compleja indistintamente como:

$$v(t) = \Re(V_m e^{\sigma t} \cdot e^{(j\omega t + \theta)}) \quad \text{o} \quad v(t) = \Re(V_m e^{\sigma t} \cdot e^{(-j\omega t - \theta)})$$

Cualquiera de las dos expresiones es adecuada. Utilizaremos la primera y factorizando y sustituyendo $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ obtenemos:

$$v(t) = \Re(V_m e^{j\theta} \cdot e^{(\sigma + j\omega)t}) \Rightarrow v(t) = \Re(V_m e^{j\theta} \cdot e^{st}) \quad (4)$$

Esta última expresión de la señal senoidal amortiguada se parece a la expresión de la señal senoidal *no amortiguada* que vimos en el cap. 4.9 al estudiar el análisis mediante fasores, sólo que ahora tenemos $\mathbf{s}$ en lugar de $j\omega$. Se ha extendido el concepto de fasor y en lugar de restringirnos al estudio de las excitaciones senoidales con sus frecuencias angulares, se incluye ahora también a la señal senoidal amortiguada con una frecuencia compleja.

Supongamos que se aplica una señal senoidal exponencialmente amortiguada a una red eléctrica y que la respuesta forzada que se busca es la corriente en alguna rama. La respuesta forzada tendrá la forma de la función de excitación, su integral y sus derivadas, por lo que se puede suponer que la respuesta es:

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{o} \quad i(t) = \Re(I_m e^{j\varphi} \cdot e^{st}) \quad (5)$$

Donde la frecuencia compleja de la fuente y la respuesta deben ser idénticas. Al aplicar una función de excitación compleja a la red, se obtiene una respuesta compleja cuya parte real es la respuesta real buscada. Se trabajará omitiendo la notación $\Re(\quad)$, la cual podrá reinsertarse en cualquier momento y *deberá* reinsertarse siempre que se quiera obtener la respuesta en el dominio del tiempo.

Los pasos básicos a ejecutar son:

- i) Caracterizar al circuito mediante ecuaciones integrodiferenciales de mallas o nodos

- ii) Sustituir en dichas ecuaciones las funciones de excitación dadas en forma compleja y las respuestas forzadas supuestas (también en forma compleja).
- iii) Efectuar las integraciones y derivaciones indicadas
- iv) En todas las ecuaciones, cada término contendrá el factor e^{st} , el cual se “suprime”, sobreentendiéndose que se lo deberá reinsertar si se desea volver al dominio del tiempo.
- v) Ahora, sin el operador $\Re(\)$ ni el factor e^{st} , todas las tensiones y corrientes han sido convertidas del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Las ecuaciones integrodiferenciales a su vez se han transformado en ecuaciones algebraicas, que se pueden resolver tan fácilmente como en el caso del estado senoidal permanente.

21.3 $Z(s)$ e $Y(s)$

Para poder aplicar las leyes de Kirchhoff a funciones de excitación y a respuestas forzadas complejas, es necesario conocer la constante de proporcionalidad entre tensión y corriente complejas en un elemento de circuito.

Estudiaremos el caso del inductor L de la fig. 1, entre cuyos bornes se aplica una tensión $v(t)$ y como respuesta, lo atraviesa la corriente $i(t)$.

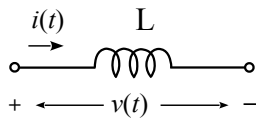


fig. 1

Supongamos que $v(t)$ es de la forma:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) = \Re(V_m \cdot e^{j\theta} e^{st}) = \Re(V \cdot e^{st})$$

La corriente $i(t)$ deberá tener la forma:

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) = \Re(I_m \cdot e^{j\varphi} e^{st}) = \Re(I \cdot e^{st})$$

Sustituimos ahora estas expresiones en la ecuación que define a un inductor:

$$v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \Re(V \cdot e^{st}) = L \frac{d\Re(I \cdot e^{st})}{dt} = \Re(sL I \cdot e^{st})$$

Omitiendo la $\Re$ que indica parte real, nos queda la respuesta compleja a una función de excitación compleja y suprimiendo el factor superfluo e^{st} , obtenemos la relación entre V e I . Su cociente es la impedancia, la cual ahora depende de la frecuencia compleja s .

$$V = sL \cdot I \Rightarrow Z(s) = \frac{V}{I} = sL \quad (6)$$

V e **I** siguen recibiendo el nombre de fasores. Cada una de estas cantidades complejas tiene una amplitud y un ángulo de fase. Mediante un razonamiento similar se obtienen las impedancias y admitancias de resistores y condensadores a la frecuencia compleja **s**, las cuales se resumen en la tabla.

	R	L	C
Z(s)	R	sL	$\frac{1}{\mathbf{sC}}$
Y(s)	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{\mathbf{sL}}$	sC

21.4 El plano de la frecuencia compleja

Al estudiar el fenómeno de la resonancia eléctrica, se consideró por primera vez la respuesta de un circuito con excitación senoidal como una función de la frecuencia. En el caso particular del circuito resonante paralelo, se halló que $|\mathbf{Z}|$ es máximo a ω_r y mínimo para $\omega = 0$ y $\omega = \infty$. Si dicho circuito fuese ideal, tendríamos que $|\mathbf{Z}| = \infty$ para ω_r y que $|\mathbf{Z}| = 0$ para $\omega = 0$ y $\omega = \infty$. A estas frecuencias se las llama *frecuencias críticas*. Si se excita al circuito con una fuente de corriente senoidal **I**, la amplitud de la respuesta **V** vale 0 para $\omega = 0$, por lo que se dice que la respuesta tiene un *cero* en $\omega = 0$. Para $\omega = \omega_r$, la respuesta vale infinito y se dice que tiene un *polo* en ω_r . Finalmente, cuando $\omega \rightarrow \infty$ se observa que la respuesta tiende a cero, o sea que $\omega = \infty$ también es un *cero*.

Se puede también analizar la respuesta de frecuencia como una función de la frecuencia compleja **s**. La gráfica así obtenida es muy útil para el análisis de circuitos y para determinar la estabilidad de un sistema realimentado.

La frecuencia compleja **s** requiere dos parámetros σ y ω para ser especificada por completo y se utilizan para ello dos ejes σ y $j\omega$ perpendiculares entre sí. El plano determinado por ambos ejes recibe el nombre de *plano de frecuencia compleja o plano S*, a cada punto del plano le corresponde un único valor de **s**.

Dada la función del tiempo correspondiente a una excitación o respuesta forzada, se puede asociar su forma funcional con las diferentes regiones del plano **S**. El origen representa un valor de DC. Los puntos sobre el eje σ son funciones exponenciales, decrecientes para $\sigma < 0$ y crecientes para $\sigma > 0$. Las funciones senoidales puras están en el eje $j\omega$ positivo o negativo. Los puntos del semiplano derecho, con excepción del eje σ , corresponden a señales senoidales que crecen exponencialmente. Los puntos del semiplano izquierdo, con excepción del eje σ , corresponden a señales senoidales exponencialmente decrecientes.

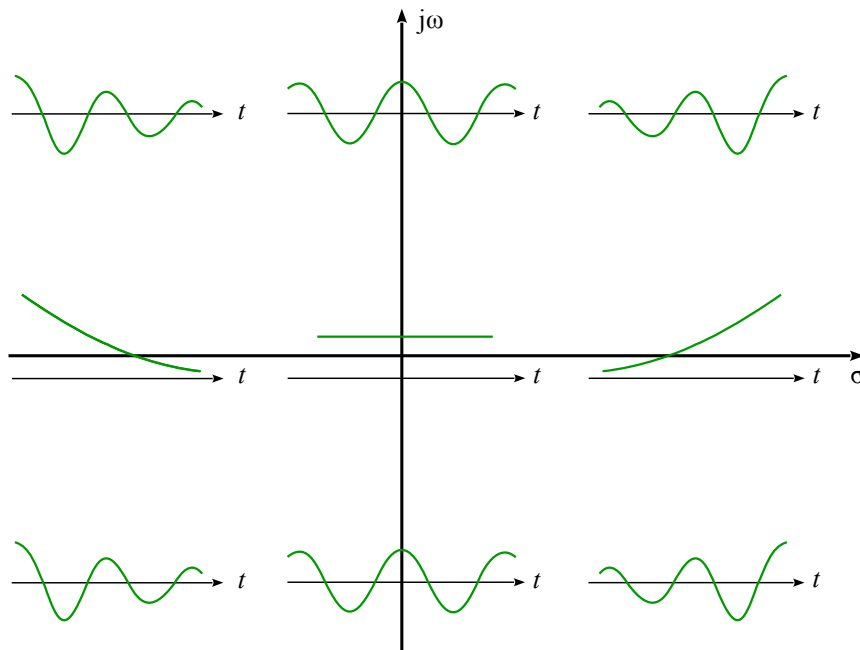


fig. 2

Un tercer eje, perpendicular al plano $\mathbf{S}$ y que pasa por el origen, representa a la magnitud de la respuesta, sea ésta $|\mathbf{Z}|$, $|\mathbf{Y}|$, $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ o cualquier otra cantidad apropiada. Si se calcula esa magnitud para cada valor de $\mathbf{s}$, la gráfica resultante es una superficie por encima del plano $\mathbf{S}$ (o apenas tocándolo).

Como ya dijimos, las frecuencias críticas son aquellas para las cuales dicha cantidad vale cero (*ceros*) o infinito (*polos*) y se las puede representar mediante un diagrama o patrón de polos y ceros bidimensional. Para ello, se marca en el plano $\mathbf{S}$ a cada polo mediante una cruz y a cada cero mediante un círculo.

Ejemplo

Para un cierto circuito, tenemos que
$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s} + 2}{\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 26}$$

Calculando $|\mathbf{Z}(\mathbf{s})|$, se obtiene la superficie de la fig. 3a

Tras resolver la ec. de 2º grado del denominador, podemos escribir:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s} + 2}{(\mathbf{s} + 1 - j5)(\mathbf{s} + 1 + j5)}$$

$\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ tiene un cero en $\mathbf{s} = -2$ y dos polos conjugados en $\mathbf{s} = -1 + j5$ y $\mathbf{s} = -1 - j5$

En la fig. 3b se representa el correspondiente diagrama de polos y ceros

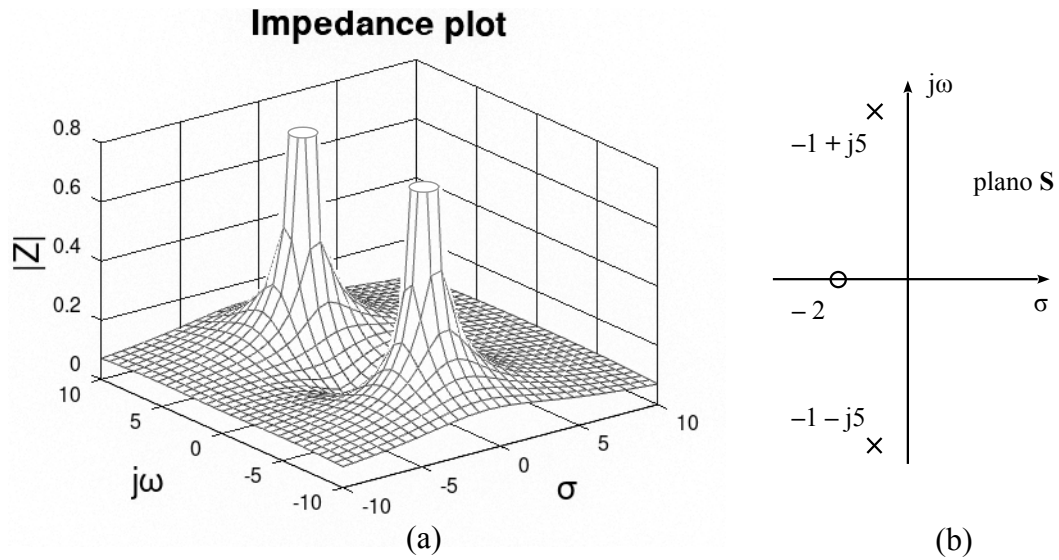


fig. 3

21.5 La Respuesta Natural y el plano S

A partir del patrón de polos y ceros de la respuesta forzada producida por una función de excitación arbitraria, se puede obtener la respuesta completa de un circuito (natural + forzada) si además se conocen las condiciones iniciales.

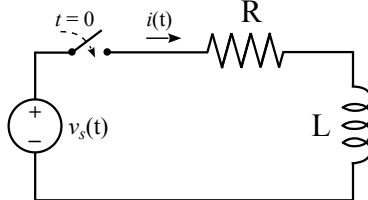


fig. 4

Veamos el ejemplo de la figura 4. Tras cerrar el interruptor en $t = 0$, la fuente de tensión $v(t)$ hace circular una corriente $i(t)$ compuesta por la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada.

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

La respuesta forzada se puede hallar en el dominio de la frecuencia, siempre que $v(t)$ tenga una forma que se pueda transformar a ese dominio:

$$\mathbf{I}_f(s) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + sL} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\mathbf{V}_s}{s + R/L}$$

De acuerdo a lo expuesto en el apartado **21.2**, $i_f(t)$ se obtiene reemplazando por sus valores s , L y R , reinsertando el factor e^{st} y tomando la parte real $\Re(\)$.

La respuesta natural tiene por definición una forma que es independiente de la función de excitación. Ésta, junto con las condiciones iniciales, sólo contribuye

a determinar la magnitud de la respuesta natural.

Podemos intentar obtener la respuesta natural como un caso límite de la respuesta forzada, haciendo $\mathbf{V}_s = 0$. Parecería que $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ también debería valer 0, pero esto no es necesariamente cierto si se está operando a una frecuencia compleja que es un polo simple de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Como ambos, numerador y denominador, pueden valer cero, $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ no tiene por qué ser cero.

La función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es el cociente de la respuesta forzada deseada dividida la función de excitación:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} \Rightarrow \mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_s \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

Si $\mathbf{V}_s = 0$, sólo se podrá obtener para la corriente un valor distinto de cero si se trabaja en un polo de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Una corriente finita a esa frecuencia representa a la respuesta natural. En nuestro ejemplo:

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = A \text{ con } \mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0 \text{ y } A \text{ es una constante desconocida}$$

Transformando esta respuesta natural al dominio del tiempo:

$$i_n(t) = \Re(A \cdot e^{-Rt/L}) = A \cdot e^{-Rt/L}$$

La respuesta completa es entonces:

$$i(t) = A \cdot e^{-Rt/L} + i_f(t)$$

Generalizando, la respuesta de la red de la fig. 5, la cual no contiene fuentes independientes, se puede expresar mediante una función de transferencia que muestra todas las frecuencias críticas.

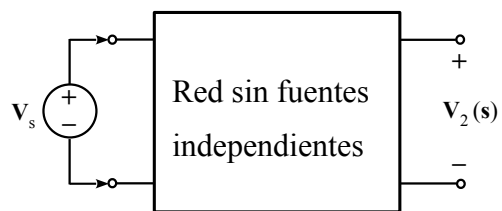


fig. 5

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = k \frac{(s-s_1)(s-s_3) \dots (s-s_m)}{(s-s_2)(s-s_4) \dots (s-s_N)} \quad m \leq N \quad (7)$$

Los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ están en $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \dots$ y por lo tanto para que $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ tenga un valor finito a cada una de esas frecuencias, debe ser una posible forma

funcional para la respuesta natural. Si se aplica una tensión de 0V a la entrada (lo que equivale a cortocircuitar los terminales de entrada), la respuesta natural deberá tener la forma:

$$v_{2n}(t) = A_2 \cdot e^{s_2 t} + A_4 \cdot e^{s_4 t} + \dots \quad (8)$$

Cada A deberá evaluarse a partir de las condiciones iniciales, las que incluyen el valor inicial de cualquier fuente de tensión aplicada a la entrada.

Resonancia en serie

En el circuito RLC serie de la fig. 6, la tensión del generador $\mathbf{V}$ es la función de excitación y la corriente $\mathbf{I}$ es la respuesta. Nos proponemos hallar el patrón de polos y ceros de su función de transferencia $\mathbf{H(s)} = \mathbf{I/V}$ y su relación con lo estudiado en el capítulo 6.

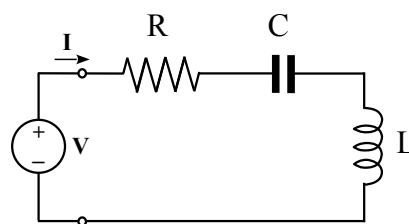


fig. 6

La impedancia presentada por el circuito al generador ideal de tensión es:

$$\mathbf{Z(s)} = R + sL + \frac{1}{sC} = L \frac{s^2 + sR/L + 1/LC}{s}$$

Sustituimos en la expresión anterior el coeficiente de amortiguación exponencial α y la frecuencia de resonancia no amortiguada ω_0

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\mathbf{Z(s)} = L \frac{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}{s}$$

La función de transferencia buscada es la admitancia del circuito:

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \mathbf{Y(s)} = \frac{1}{\mathbf{Z(s)}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad (9)$$

La frecuencia de resonancia no amortiguada ω_0 , se puede expresar en función de la frecuencia de resonancia amortiguada ω_d y de α :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_d^2 + \alpha^2$$

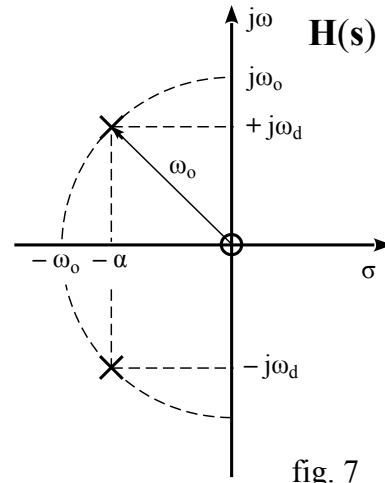
Sustituyendo ahora ω_0 en la ec. (9) se obtiene:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega_d^2}$$

Factorizamos el denominador aplicando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{(s + \alpha + j\omega_d)(s + \alpha - j\omega_d)} \quad (10)$$

El numerador tiene una raíz en $s = 0$ y en consecuencia $\mathbf{H}(s)$ tiene un cero en el origen. El denominador tiene dos raíces complejas conjugadas en $(-\alpha - j\omega_d)$ y $(-\alpha + j\omega_d)$, las cuales corresponden a los polos de $\mathbf{H}(s)$. De la relación que existe entre α , ω_d y ω_0 , es evidente que la distancia desde el origen del plano $\mathbf{S}$ hasta uno de los polos de $\mathbf{H}(s)$ es igual a ω_0 . Si se traza un arco con centro en el origen del plano $\mathbf{S}$ y que pase por uno de los polos, el corte con la parte positiva del eje $j\omega$ es $s = j\omega_0$.



Supongamos que mantenemos constante ω_0 manteniendo constantes L y C y que variamos el Q variando el valor de R . Conforme disminuye R , el Q aumenta y la relación que hay entre α y R indica que los polos se acercarán al eje $j\omega$ y se alejarán del eje σ . Los polos se moverán sobre un arco de radio ω_0 y centro en el origen. Cuando $R = 0$, el Q es infinito y los polos se encuentran en $s = \pm j\omega_0$.

Cuando $R = 2\sqrt{L/C}$, tenemos que $\alpha = 0$ y el $Q = 1/2$. Se forma un polo doble en $s = -\omega_0$ y estamos en la condición de amortiguamiento crítico.

Sí $R > 2\sqrt{L/C}$ tenemos que $\alpha > \omega_0 \Rightarrow \omega_d = j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Sustituyendo ω_d en el denominador de la ec. (10) obtenemos: $(s + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})(s + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})$

En consecuencia, hay dos polos sobre el semieje σ negativo.

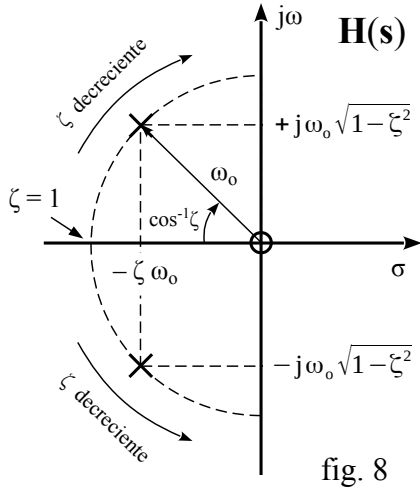


fig. 8

En la teoría de sistemas, se suele escribir la función de transferencia usando como parámetro el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = \alpha / \omega_0$. En la próxima sección, adoptar esa notación nos permitirá el uso de curvas universales.

Sustituyendo en la ec. (9) $\alpha = \zeta \cdot \omega_0$ se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (11)$$

Las raíces del denominador de la ec. (11) son $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Sí $\zeta > 1$, el denominador tiene dos raíces reales negativas. $H(s)$ tiene un cero en el origen y dos polos reales negativos. El circuito está sobreamortiguado.

Sí $\zeta = 1$, el denominador tiene una raíz doble en $-\omega_0$. $H(s)$ tiene un cero en el origen y un polo doble real en $-\omega_0$. El amortiguamiento es crítico.

Sí $\zeta < 1$, el denominador tiene dos raíces reales complejas conjugadas en $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. $H(s)$ tiene un cero en el origen y dos polos complejos conjugados. El circuito está entonces subamortiguado. El vector que une los polos con el origen tiene módulo ω_0 y forma con el semieje real negativo un ángulo igual a $\pm \cos^{-1} \zeta$.

21.5 Diagramas de Bode

Estos diagramas permiten trazar rápidamente una gráfica aproximada de la magnitud y fase de una función de transferencia. La magnitud se expresa en dB y en ambos casos se usa una escala de frecuencias logarítmica para la abscisa.

Consideremos la función de transferencia $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Sabemos que su respuesta de amplitud es $|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}$

Si la expresamos en decibels, obtendremos

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |N(j\omega)| - 20 \log |D(j\omega)|$$

Si se factoriza $N(s)$ y $D(s)$, ellos estarán compuestos por 4 tipos de factores:

- Una constante, K
- Una raíz simple en el origen, s
- Una raíz real simple, $1 + s/a$
- Un par de raíces complejas conjugadas, $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$

Para comprender la naturaleza de las gráficas de la amplitud en dB, sólo necesitamos analizar las respuestas de amplitud de estos cuatro tipos de factor. Si estos factores están en el numerador, sus magnitudes en dB tienen signo positivo y si están en el denominador, sus magnitudes en dB tienen signo negativo.

a) El factor K

La ganancia, o pérdida, es $20 \log K = K_2$

La constante K_2 es negativa si $|K| < 1$,

y es positiva si $|K| > 1$

La respuesta de fase es 0° si K es positivo y es 180° si K es negativo

En la fig. 9 se muestran los diagramas de Bode de amplitud y fase correspondientes

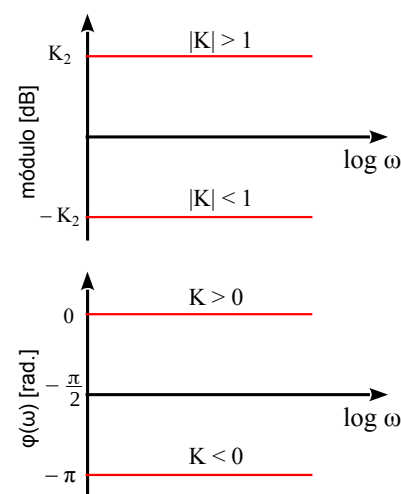


fig. 9

b) El factor s

El factor s implica una pérdida o ganancia asociada de $\pm 20 \cdot \log(\omega)$.

Sí está en el denominador, $\mathbf{H}(s)$ tiene un polo en el origen y la gráfica de la magnitud en dB en función de la frecuencia tiene una pendiente de -20dB/década o sea -6dB/octava . Sí el factor está en el numerador, $\mathbf{H}(s)$ tiene un cero en el origen y la gráfica de la magnitud en dB en función de la frecuencia tiene una pendiente de $+20\text{dB/década}$ o $+6\text{dB/octava}$. La fase es constante para todo ω .

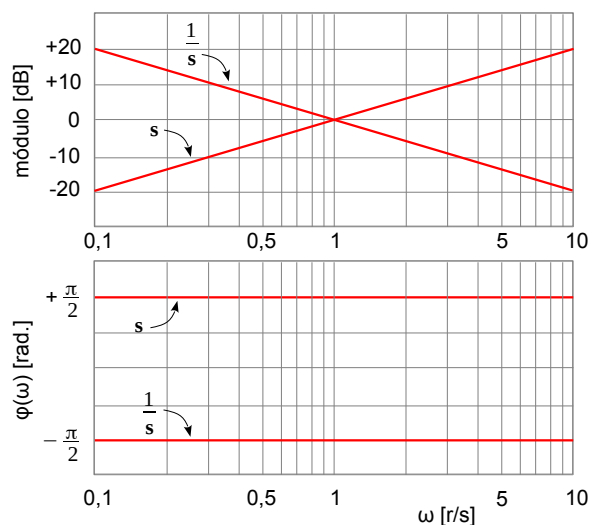


fig. 10

c) El factor $1 + s/a$

La magnitud es $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = \pm 20 \log|1 + j\omega/a| = \pm 20 \log(1 + \omega^2/a^2)^{1/2}$

y la fase es $\varphi(j\omega) = \angle(1 + j\omega/a)^{\pm 1} = \pm \text{tg}^{-1}(\omega/a)$

El signo depende de que el factor esté en el numerador o en el denominador.

Para obtener la aproximación de la magnitud mediante segmentos de recta, se buscan las asíntotas de $|1 + j\omega/a|$

Para $\omega \rightarrow 0$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para $\omega \rightarrow \infty$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \pm 20 \log(\omega/a) \text{ dB}$$

Según el caso, el multiplicar ω por 10 aumenta o disminuye la magnitud en 20dB. La pendiente de la asíntota es de $\pm 20\text{dB/década}$ o $\pm 6\text{dB/octava}$.

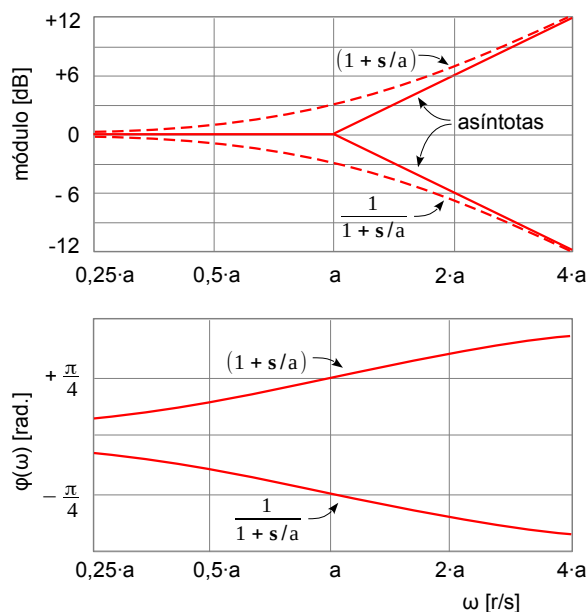


fig. 11

Las asíntotas se cortan en $\omega = a$, en la llamada *frecuencia de corte*. Si se compara la aproximación mediante las asíntotas con el verdadero valor de la magnitud se obtiene:

frecuencia	$ H(j\omega) $	aprox.
$\omega = a/2$	± 1 dB	0 dB
$\omega = a$	± 3 dB	0 dB
$\omega = 2 \cdot a$	± 7 dB	± 6 dB

d) Un par de raíces complejas conjugadas, $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$

Describiremos el par de polos (o ceros) conjugados en términos del módulo ω_0 y del argumento φ , tal como se hizo en la fig. 8 para el circuito RLC serie.

En forma binómica, estos polos (ceros) son $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Cuanto más se acerca φ a $\pi/2$, menor es el factor de amortiguamiento y cuando φ se aproxima a 0, el factor de amortiguamiento es casi 1.

Para el estudio, es conveniente adoptar la forma $\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + 1$

La magnitud es $|H(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|$

y la fase es $\varphi(j\omega) = \angle \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]^{\pm 1} = \pm \text{tg}^{-1} \left[\frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right]$

El signo depende de que el factor esté en el numerador o en el denominador.

Las asíntotas en este caso son:

Para $\omega \ll \omega_0$

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para $\omega \gg \omega_0$

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx \pm 40 \log(\omega/\omega_0) \text{ dB}$$

La pendiente de esta asíntota es de $\pm 40\text{dB/década}$. Las asíntotas se cortan en 0 dB para $\omega = \omega_0$

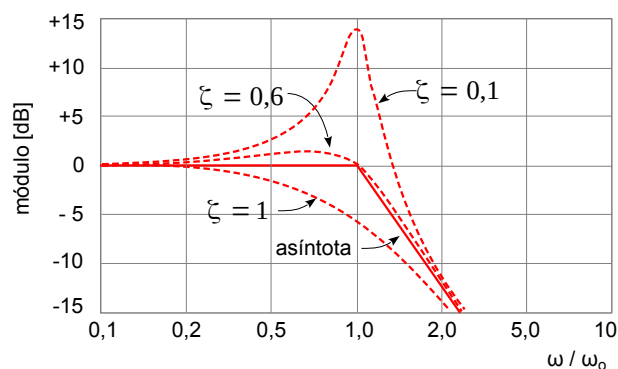


fig. 12

El factor de amortiguamiento ζ tiene un papel importante en la exactitud de la aproximación. En la fig. 12 se han dibujado, para el caso de 2 polos, con trazo lleno la aproximación mediante las asíntotas y con trazo punteado las curvas para $\zeta = 0,1$, $\zeta = 0,6$ y $\zeta = 1,0$.

Las fig. 13a y b son las curvas universales de magnitud y fase para el caso de dos polos conjugados. Para un par de ceros conjugados, basta con invertir los signos de las escalas de magnitud y de fase.

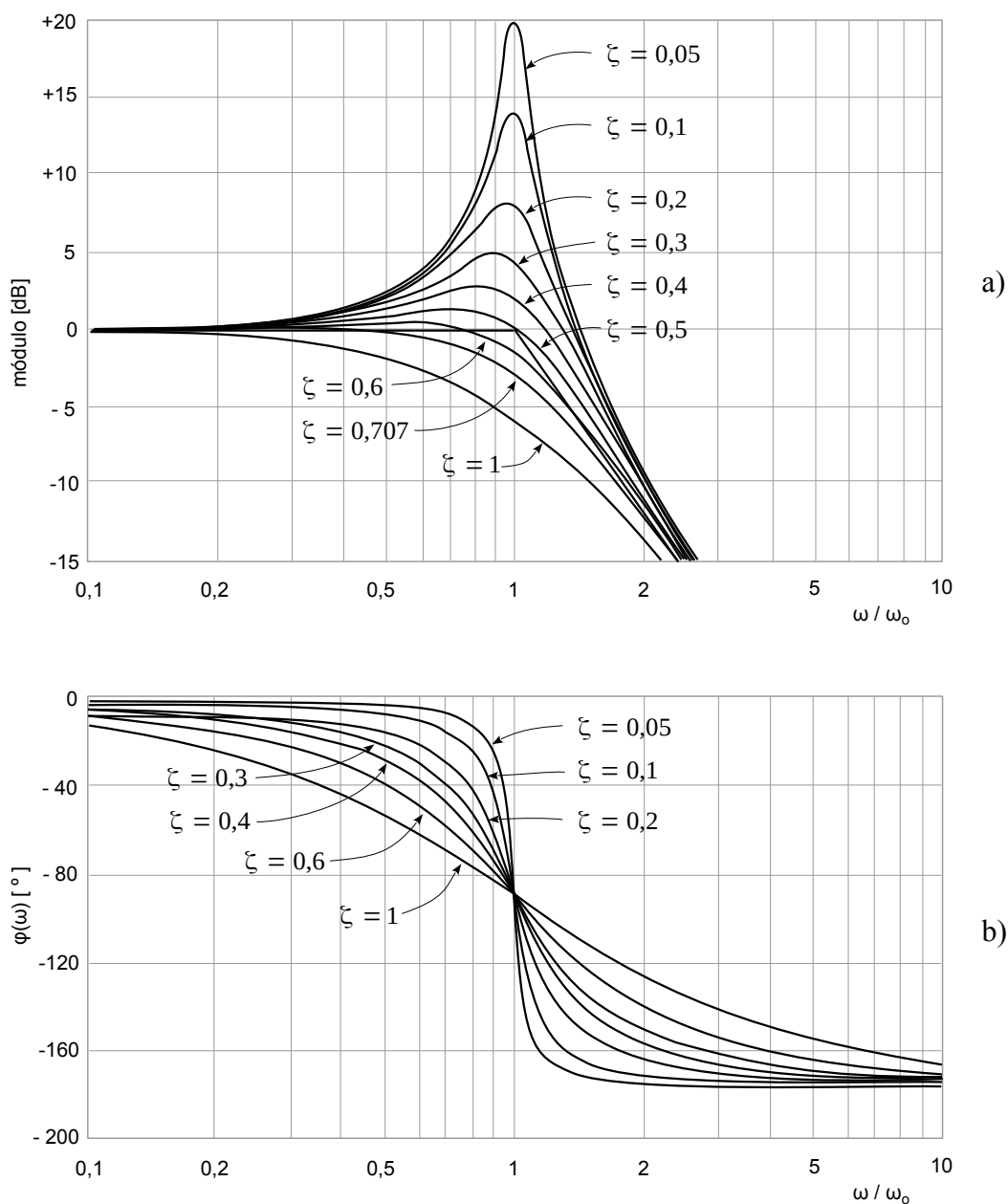


fig. 13

Para construir el diagrama de Bode, se traza cada una de las gráficas correspondientes a los factores que aparecen en la función de transferencia y luego se las suma.

Consideremos un sistema cuya función de transferencia puede escribirse como:

$$H(s) = \frac{-2s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{2 \cdot 10^4}\right)}$$

Tenemos una constante $20 \cdot \log|-2| = 6 \text{ dB}$ y un factor s en el numerador, lo cual implica un cero en el origen y una pendiente de $+6 \text{ dB}$ por octava.

En el denominador hay dos factores de la forma $(1 + s/a)$, los cuales determinan un cambio de pendiente de -6 dB por octava a las frecuencias de corte $\omega = 10 \text{ r/s}$ y $\omega = 20.000 \text{ r/s}$. El resultado de la suma se representa mediante trazo continuo.

En cuanto a la fase, el numerador tiene un ángulo constante de $-\pi/2 \text{ rad}$. A él se suman los ángulos introducidos por los puntos de quiebre a las frecuencias de corte $\omega = 10 \text{ r/s}$ y $\omega = 20.000 \text{ r/s}$.

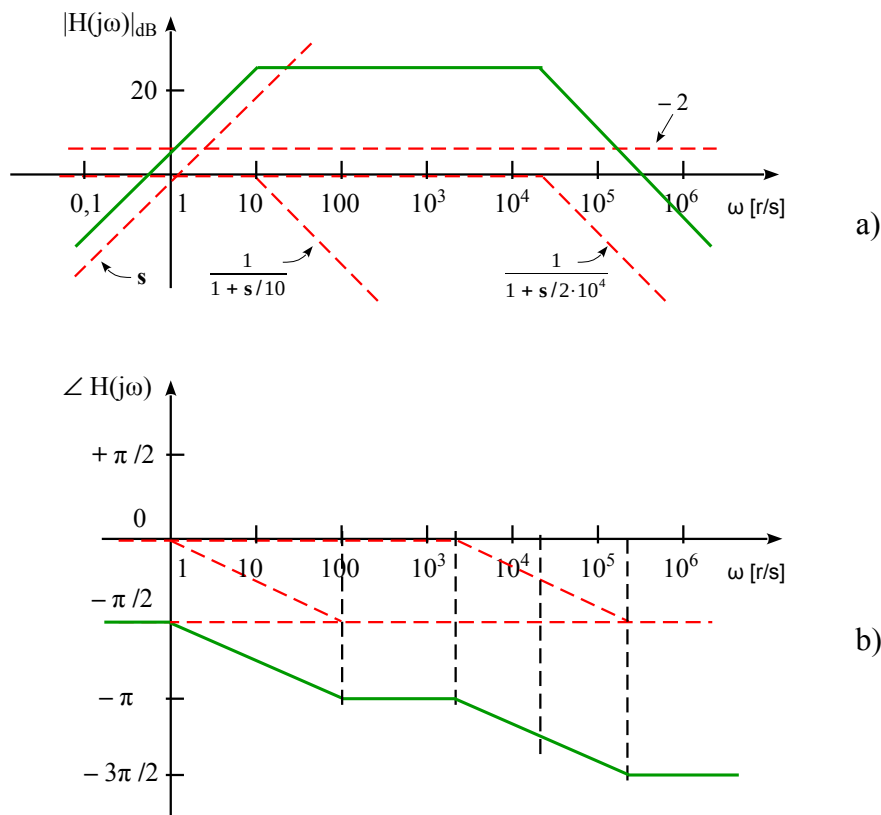
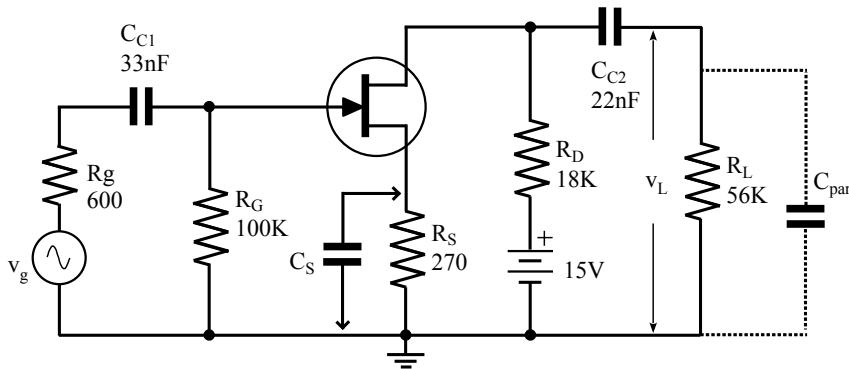


fig. 14

En ocasiones, la tarea de trazar el diagrama de Bode es sensiblemente menos engorrosa si, en lugar de buscar obtener una expresión de $\mathbf{H}(s)$ que sea válida para todas las frecuencias, usamos circuitos equivalentes parciales para distintos rangos de frecuencias.

Ejemplo



2N5457

 $I_{DSS} = 1\text{mA}$ $V_p = 0,5\text{V}$ $g_m = 3,8\text{ mS}$ $C_{gs} = 4,5\text{ pF}$ $C_{gd} = 1,5\text{ pF}$ $C_{par.} = 18\text{pF}$

En el amplificador realimentado por R_S de la figura, hay en paralelo con la carga R_L una capacidad parásita $C_{par.}$. Se desea extender la respuesta de alta frecuencia del amplificador compensándolo mediante C_S .

- 1) Trazar el diagrama de Bode del amplificador sin compensar
- 2) Calcular el valor adecuado de C_S y trazar el nuevo diagrama de Bode

Frecuencias medias

$$\mathbf{H}(j\omega)_m = \frac{R_G}{R_g + R_G} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D // R_L}{g_m \cdot R_S + 1} = \frac{100\text{K}}{600 + 100\text{K}} \cdot \frac{-3,8\text{mS} \cdot 18\text{K} // 56\text{K}}{3,8\text{mS} \cdot 270 + 1} = -25,25$$

$$\mathbf{H}(j\omega)_m \text{ dB} = 20 \log |\mathbf{H}(s)_m| = 20 \log |-25,25| = 28 \text{ dB}$$

Frecuencias bajas

$$\mathbf{H}(s)_b = \frac{R_G \cdot s C_{c1}}{(R_g + R_G) s C_{c1} + 1} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D}{g_m \cdot R_S + 1} \cdot \frac{R_L \cdot s C_{c2}}{(R_D + R_L) s C_{c2} + 1}$$

$\mathbf{H}(s)_b$ tiene un cero doble en $s = 0$ y dos polos en:

$$s = -(R_g + R_G)C_{c1} \quad \text{y} \quad s = -(R_D + R_L)C_{c2}$$

Sustituyendo valores, las frecuencias de corte debidas a los polos son:

$$f_{1,in} = \frac{1}{2\pi(R_g + R_G)C_{c1}} = \frac{1}{2\pi 100,6 \text{ K} \cdot 33 \text{ nF}} = 48 \text{ Hz}$$

$$f_{1,out} = \frac{1}{2\pi(R_D + R_L)C_{c2}} = \frac{1}{2\pi (18 \text{ K} + 56 \text{ K}) \cdot 22 \text{ nF}} = 97,8 \text{ Hz}$$

Frecuencias altas

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s)_a &= \frac{R_G / s C_i (R_G + 1/s C_i)}{R_g + [R_G / s C_i (R_G + 1/s C_i)]} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D}{g_m \cdot R_S + 1} \cdot \frac{R_L / s C_L (R_L + 1/s C_L)}{R_D + [R_L / s C_L (R_L + 1/s C_L)]} = \\ &= \frac{R_G / (R_g + R_G)}{\frac{R_g \cdot R_G \cdot s C_i}{R_g + R_G} + 1} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D}{g_m \cdot R_S + 1} \cdot \frac{R_L / (R_D + R_L)}{\frac{R_D \cdot R_L \cdot s C_L}{R_D + R_L} + 1} \quad C_L = C_o + C_{par} \end{aligned}$$

$\mathbf{H}(s)_a$ tiene dos polos en:

$$s = -\frac{R_g + R_G}{R_g \cdot R_G \cdot C_i} \quad \text{y} \quad s = -\frac{R_D + R_L}{R_D \cdot R_L \cdot C_L}$$

Sustituyendo valores, las frecuencias de corte debidas a los polos son:

$$C_i = C_{gs} \left(1 - \frac{g_m \cdot R_S}{g_m \cdot R_S + 1}\right) + C_{gd} \left(1 - \frac{g_m \cdot R_D // R_L}{g_m \cdot R_S + 1}\right) = 4,5 \text{ pF} \cdot 0,49 + 1,5 \text{ pF} \cdot 26,5 = 42 \text{ pF}$$

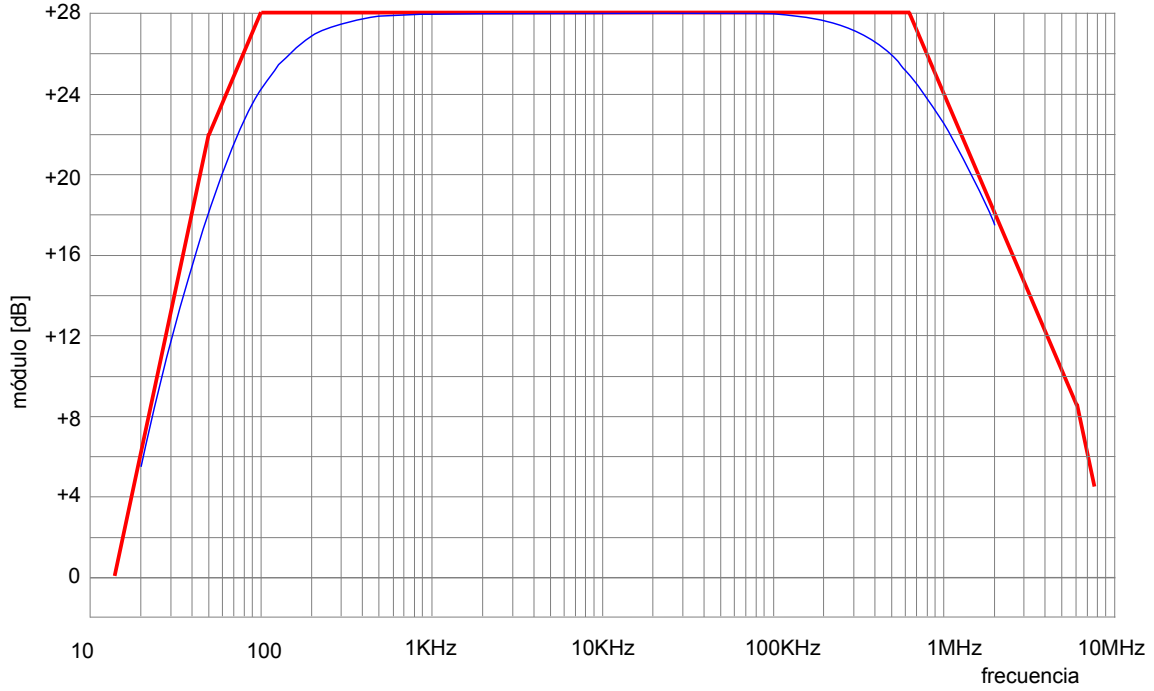
$$C_L = C_{gd} \left(1 - \frac{g_m \cdot R_S + 1}{-g_m \cdot R_D // R_L}\right) + C_{par} = 1,5 \text{ pF} \cdot 1,04 + 18 \text{ pF} = 19,56 \text{ pF}$$

$$f_{2,in} = \frac{R_g + R_G}{2\pi \cdot R_g \cdot R_G \cdot C_i} = \frac{600 + 100 \text{ K}}{2\pi \cdot 600 \cdot 100 \text{ K} \cdot 42 \text{ pF}} = 6,35 \text{ MHz}$$

$$f_{2,out} = \frac{R_D + R_L}{2\pi \cdot R_D \cdot R_L \cdot C_L} = \frac{18 \text{ K} + 56 \text{ K}}{2\pi \cdot 18 \text{ K} \cdot 56 \text{ K} \cdot 19,56 \text{ pF}} = 597,3 \text{ KHz}$$

Para las frecuencias bajas, sabemos que debido al cero doble en $s = 0$ habrá una asíntota con una pendiente de +40dB/década hasta la $f_{1,in}$, donde se cortará con otra asíntota que tiene una pendiente de +20 dB/década, la cual a su vez se cortará en la $f_{1,out}$ con una asíntota horizontal con $\mathbf{H}(j\omega)_{m \text{ dB}} = 28 \text{ dB}$. Podemos trazar primero la asíntota horizontal y luego proceder a trazar las otras dos. Para las frecuencias altas, sabemos que en la $f_{2,out}$ la asíntota horizontal se

cortará con una asíntota que tiene una pendiente de -20 dB/década, la cual a su vez se cortará en la $f_{2,in}$ con otra asíntota que tiene una pendiente de -40 dB/década. En la figura se muestran el diagrama de Bode resultante y la curva de respuesta de frecuencia obtenida al ensayar el prototipo.



Para compensar el amplificador en alta frecuencia, debemos introducir C_S en el cálculo del circuito equivalente para frecuencia altas. Como el valor de C_S será relativamente grande, debemos además recalcular el valor de C_i .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s)_a &= \frac{R_G / (R_g + R_G)}{\frac{R_g \cdot R_G \cdot s C_i}{R_g + R_G} + 1} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D}{g_m \cdot \left[\frac{R_S}{s C_S (R_S + 1/s C_S)} + 1 \right]} \cdot \frac{R_L / (R_D + R_L)}{\frac{R_D \cdot R_L \cdot s C_L}{R_D + R_L} + 1} = \\ &= \frac{R_G / (R_g + R_G)}{\frac{R_g \cdot R_G \cdot s C_i}{R_g + R_G} + 1} \cdot \frac{-g_m \cdot R_D (s C_S \cdot R_S + 1)}{g_m \cdot R_S + s C_S R_S + 1} \cdot \frac{R_L / (R_D + R_L)}{\frac{R_D \cdot R_L \cdot s C_L}{R_D + R_L} + 1} \end{aligned}$$

Al agregar C_S , se introducen en $\mathbf{H}(s)_a$: un cero en $s = -\frac{1}{C_S \cdot R_S}$ y un polo en $s = -\frac{g_m \cdot R_S + 1}{C_S \cdot R_S}$

A efectos de realizar la compensación, calcularemos C_S de modo que el cero cancele el polo causado por el circuito de salida. Sustituyendo valores:

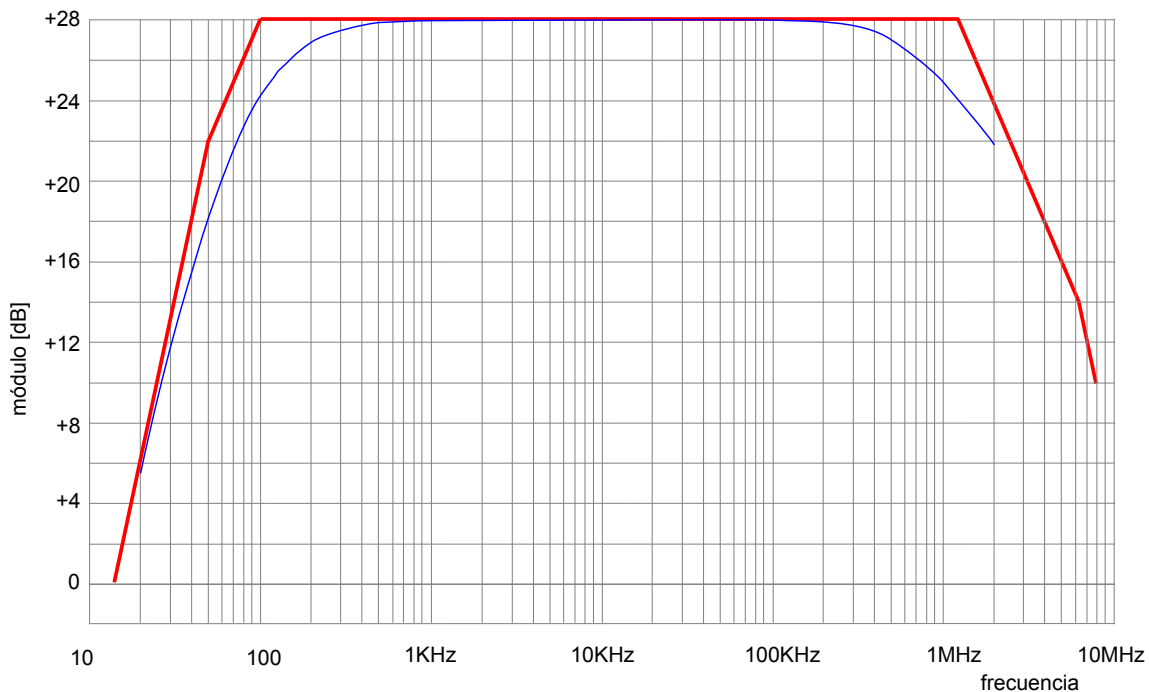
$$C_S = \frac{1}{2\pi \cdot f_{2,out} \cdot R_S} = \frac{1}{2\pi \cdot 597,3 \text{ KHz} \cdot 270} = 0,977 \text{ nF} \approx 1 \text{ nF}$$

$$f_{2,out} = \frac{g_m \cdot R_S + 1}{2\pi \cdot C_S \cdot R_S} = \frac{3,8 \text{ mS} \cdot 270 + 1}{2\pi \cdot 1 \text{ nF} \cdot 270} = 1,194 \text{ MHz}$$

$$C_i = C_{gs} + C_{gd} \left(1 - \frac{-g_m \cdot R_D // R_L}{g_m \cdot R_S + 1} \right) = 4,5 \text{ pF} + 1,5 \text{ pF} \cdot 26,5 = 44,25 \text{ pF}$$

$$f_{2,in} = \frac{R_g + R_G}{2\pi \cdot R_g \cdot R_G \cdot C_i} = \frac{600 + 100 \text{ K}}{2\pi \cdot 600 \cdot 100 \text{ K} \cdot 44,25 \text{ pF}} = 6,28 \text{ MHz}$$

En la figura se muestran el diagrama de Bode resultante y la curva de respuesta de frecuencia obtenida al ensayar el prototipo.



Bibliografía

Hayt y Kemmerly, Análisis de circuitos en ingeniería

Franklin F. Kuo, Network Analysis and Synthesis

Millman y Taub, Circuitos de Pulsos, Digitales y de Conmutación