

## 6. Resonancia

Ing. Fernando Ubiría, Ing. Pedro Castro

### 6.1 Condición de Resonancia <sup>1</sup>

Supongamos que tenemos una red de dos terminales compuesta internamente por resistores, inductores y capacitores, a la cual excitamos con una señal senoidal cuya frecuencia podemos variar a voluntad. Como las reactancias inductiva y capacitiva dependen de la frecuencia de la señal de excitación, habrá alguna frecuencia para la cual  $X_L$  y  $X_C$  se anulen mutuamente, presentando la red una impedancia resistiva pura.

**Definición:** *En una red eléctrica de dos terminales que contenga por lo menos un inductor y un capacitor, la resonancia se define como la condición que existe cuando la impedancia de entrada de la red es puramente resistiva. Una red está en resonancia cuando la tensión y la corriente en los terminales de entrada de la red se encuentran en fase.*

Se habla en general de dos tipos de resonancia:

- 1) La resonancia en serie, o neutralización de la reactancia en serie
- 2) La resonancia en paralelo, o neutralización de la susceptancia en paralelo

En una red compleja, dependiendo del número y características de las mallas que la componen, pueden ocurrir para diferentes frecuencias y más de una vez ambos tipos de resonancia.

<sup>1</sup> Aunque aquí nos ocuparemos exclusivamente de la resonancia eléctrica, la resonancia no es un fenómeno que se limite a las redes eléctricas, sino que aparece en otros campos de la física. En mecánica se refiere a un sistema capaz de vibrar, al cual se le suministra energía en forma periódica con una frecuencia igual a la frecuencia de vibración propia de ese sistema, lográndose así una gran amplitud de vibración mediante la aplicación de una fuerza relativamente pequeña.

6.2 Resonancia en serie

En la figura 1 podemos ver el circuito resonante más sencillo, compuesto por un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie. Este circuito estará en condición de resonancia cuando la reactancia neta total sea cero, o sea que la corriente  $i$  estará en fase con la tensión  $v_T$ .

La impedancia del circuito de la fig. 1 es: 
$$Z = R_s + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (1)$$

Cuando la reactancia del inductor sea igual a la del capacitor, la impedancia será resistiva pura. Si excitamos al circuito mediante una corriente senoidal cuya frecuencia podamos variar a voluntad, la frecuencia de resonancia  $f_r$  será aquella frecuencia para la cual se alcance dicha condición. En la fig. 2 están representados los diagramas fasoriales de este circuito para  $f < f_r$ ,  $f = f_r$  y  $f > f_r$ .

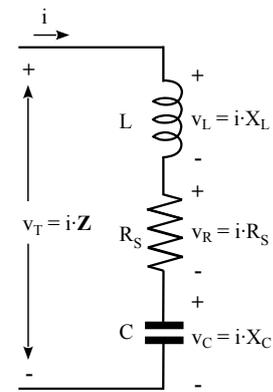


fig. 1

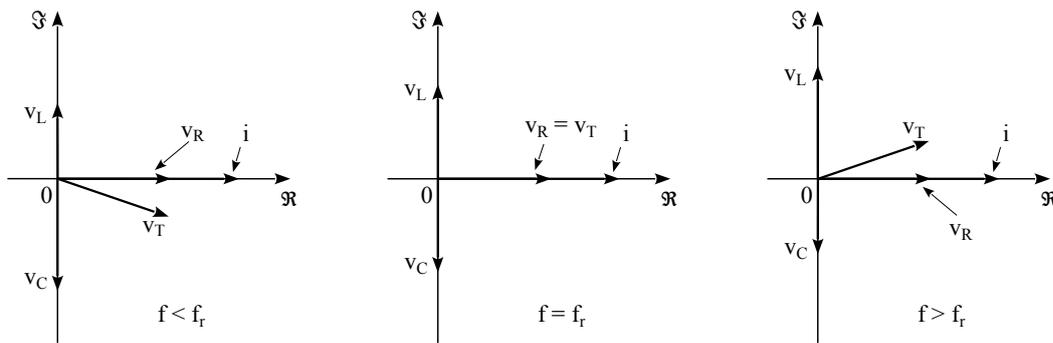


fig. 2

Por tratarse de un circuito en serie, lo más conveniente es tomar la corriente  $i$  como referencia. La tensión  $v_R$  estará en fase con la corriente  $i$ , estando  $v_L$  adelantada  $90^\circ$  y  $v_C$  atrasada  $90^\circ$  respecto a  $i$ . A la frecuencia de resonancia, la suma fasorial de las caídas de tensión en  $L$  y  $C$  es cero. La tensión total, que es igual a la suma fasorial de las tres caídas individuales de tensión, es entonces mínima para una corriente dada e igual a la caída de tensión debida a la resistencia. Si se aumenta o disminuye la frecuencia, aumenta la reactancia total

y así es mayor la caída de tensión para una corriente dada. Para calcular la frecuencia de resonancia, hacemos  $X_L = X_C$  y despejamos  $f$ , obteniendo la ec.(2).

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2)$$

A esta frecuencia desaparece entonces el término reactivo, siendo  $Z_r = R_s$  y el factor de potencia del circuito es 1. Para  $f < f_r$  se cumple que  $X_C > X_L$  y la reactancia total es capacitiva, mientras que para  $f > f_r$  se cumple que  $X_C < X_L$  y el circuito es inductivo.

### 6.2.1 Curvas de reactancia y lugares geométricos de Z e Y

Para determinar como varía la reactancia en función de la frecuencia, podemos recurrir a las curvas que representan el comportamiento de los elementos individuales:

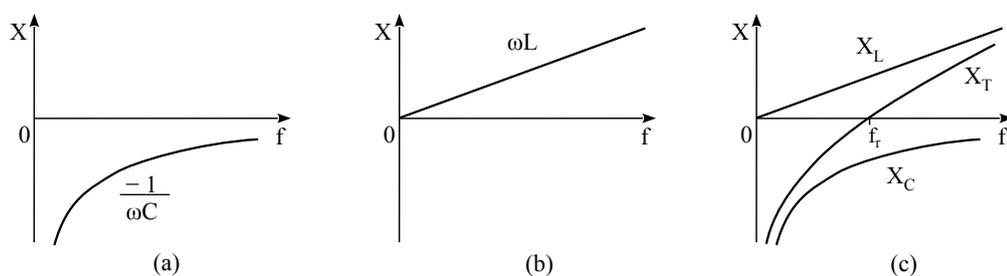


fig. 3

En la fig. 3a se muestra la curva de variación de la reactancia del capacitor en función de la frecuencia, es la hipérbola  $X_C = -1/\omega C$ . La fig. 3b muestra la curva correspondiente para la reactancia del inductor  $X_L = \omega L$ .

En la fig. 3c se han combinado ambas curvas para obtener la curva de la reactancia total  $X_T$ . La frecuencia de resonancia corresponde al punto en que esta curva corta al eje de las abscisas.

En el mundo real no hay reactancias puras y la resistencia  $R_s$  se debe mayoritariamente al inductor, pero las consideraciones generales son las mismas. La caída de tensión medida a través de un elemento reactivo cuya resistencia interna es  $R_s$ , será la suma fasorial  $i \cdot X + i \cdot R_s$ . Debido a que en todo circuito resonante verdadero habrá inevitablemente una componente resistiva, es

importante estudiar la variación de  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  en función de la frecuencia.

Sabemos que la impedancia del circuito resonante serie es  $\mathbf{Z} = R_S + jX_T$

Como  $R_S$  es constante, al variar  $X_T$  el lugar geométrico de  $\mathbf{Z}$  será una recta paralela al eje X y a una distancia  $R_S$  del mismo, tal como se ve en la fig. 4a.

El valor mínimo  $\mathbf{Z} = R_S$  se obtendrá a la frecuencia de resonancia.

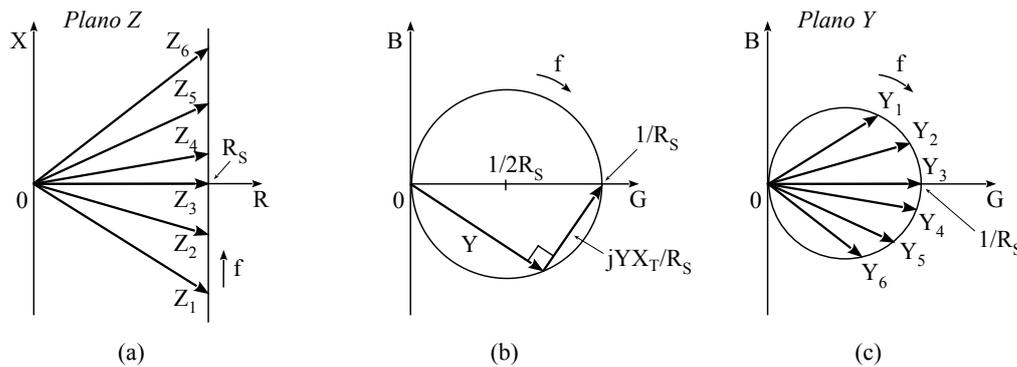


fig. 4

Para hallar el lugar geométrico de  $\mathbf{Y}$ , comenzamos planteando la ec (3):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R_S + jX_T} = \frac{R_S - jX_T}{R_S^2 + X_T^2} \quad (3)$$

Observando esta ecuación, vemos que:

- i) A la frecuencia de resonancia  $f_r$  tenemos que  $X_T = 0$  siendo el valor de  $\mathbf{Y} = 1/R_S$ . Esto implica que el lugar geométrico de  $\mathbf{Y}$  pasará por el punto  $(1/R_S, 0)$ .
- ii) El argumento del vector  $\mathbf{Y}$  será  $\arctg(-X_T/R_S)$ , o sea que a los valores de la recta de  $\mathbf{Z}$  situados en el semiplano superior o inferior del plano Z, les corresponderán valores en el semiplano opuesto del plano Y.
- iii) Si tomamos la ec. (3)  $\mathbf{Y} = 1/(R_S + jX_T)$ , multiplicamos ambos miembros por  $(R_S + jX_T)$  y luego dividimos ambos miembros entre  $R_S$  obtenemos:

$$\mathbf{Y}(R_S + jX_T) = 1 \Rightarrow \mathbf{Y} \cdot R_S + j\mathbf{Y}X_T = 1 \Rightarrow \mathbf{Y} + j\frac{\mathbf{Y}X_T}{R_S} = \frac{1}{R_S}$$

El vector  $\mathbf{Y}$  y el vector  $j\mathbf{Y}X_T/R_S$  forman un ángulo de  $90^\circ$  y su suma es constante y vale  $1/R_S$ , tal como se ve en la fig. 4b. Por lo tanto, al variar  $X_T$  el extremo de  $\mathbf{Y}$  se moverá sobre una circunferencia de diámetro  $1/R_S$ .

En la fig. 4a, la recta vertical en el plano  $Z$  representa entonces la variación de  $Z$  con la frecuencia para un valor constante de  $R_s$  y un valor variable de  $X$ . La variación de la admitancia  $Y$  correspondiente, queda representada en el plano  $Y$  por la circunferencia de diámetro  $G = 1/R_s$  representada en la fig. 4c. Los valores correspondientes de  $Z$  e  $Y$  se identifican con iguales subíndices.

### 6.2.2 Factor de calidad

El concepto de factor de calidad  $Q$ , definido en el capítulo 4 para inductores y capacitores, puede ser extendido para el caso de una red de dos terminales.

Recordemos que por definición: 
$$Q = \omega \frac{\text{max. energía almacenada}}{P \text{ media disipada}} \quad (4)$$

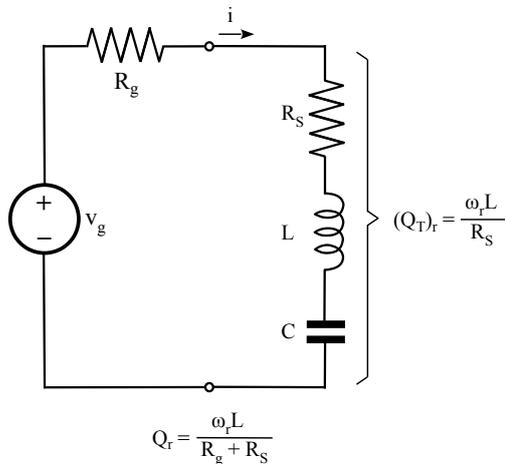


fig. 5

Como en la ec. (4) aparece la  $E_{\text{máx}}$  almacenada por ciclo, al determinar el  $Q_T$  del circuito de la fig. 5 el mismo se expresará en términos de  $L$  o  $C$ , según que la frecuencia de la corriente sea mayor o menor que  $f_r$ . En el capítulo 4 se determinó que la energía máxima almacenada por ciclo en el inductor es:

$$w_{L \text{ max}} = \frac{|I_m|^2 L}{2} = |i|^2 L \quad (5)$$

Mientras que la potencia media disipada en el mismo es  $P = |i|^2 \cdot R_s$

La energía máx. almacenada por ciclo en el capacitor es: 
$$w_{C \text{ max}} = \frac{|V_m|^2 C}{2} = |v|^2 C = \left| \frac{i}{\omega C} \right|^2 C = \frac{|i|^2}{\omega^2 C} \quad (6)$$

Sustituyendo en la ec. (4) la ec. (6) para  $f < f_r$  y la ec. (5) para  $f > f_r$  obtenemos

$$Q_T = \frac{1}{\omega C R_s} \quad f < f_r, \quad Q_T = \frac{\omega L}{R_s} \quad f > f_r$$

A  $f_r$ , la energía máxima almacenada es la misma para el inductor que para el capacitor, de modo que podemos expresar  $Q$  en términos de  $L$  o  $C$  : 
$$(Q_T)_r = \frac{\omega_r L}{R_s} = \frac{1}{\omega_r C R_s} \quad f = f_r \quad (7)$$

A menudo es necesario conocer el factor de calidad del circuito completo, incluida la resistencia interna del generador  $R_g$ . En estos casos, usamos en las fórmulas la resistencia neta total del circuito, en el caso de la figura 5 será la ec. (8)

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R_g + R_s} \quad (8)$$

Podemos relacionar el valor de  $Q_r$  con el valor de  $(Q_T)_r$  dividiendo el numerador y el denominador de la ec. (8) entre  $R_s$ :

$$Q_r = \frac{\omega_r L / R_s}{1 + R_g / R_s} = \frac{(Q_T)_r}{1 + R_g / R_s} \quad (9)$$

### 6.2.3 Agudeza de resonancia

Hemos visto que el lugar geométrico de la admitancia de un circuito resonante serie es una circunferencia en el plano Y, obteniéndose el valor máximo  $\mathbf{Y} = 1/R_s$  a la frecuencia de resonancia. Alternativamente, podemos representar  $|\mathbf{Y}|$  y  $\theta$  en función de la frecuencia en un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se ve en la fig. 6.

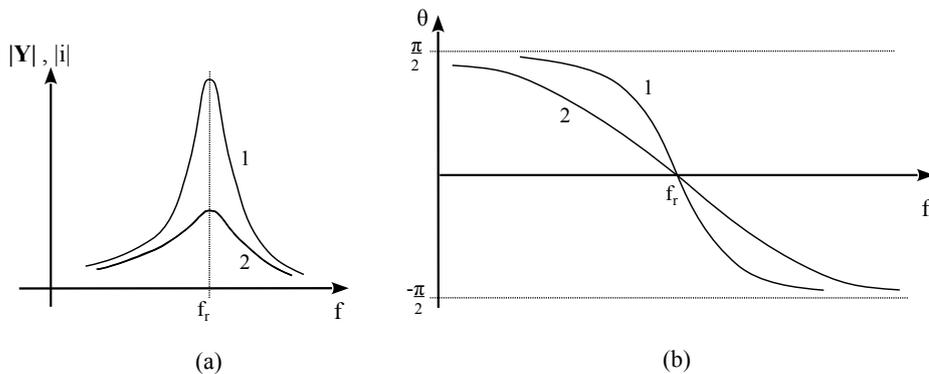


fig. 6

Cuando se le aplica al circuito una tensión constante, la ordenada en la fig.6a también representa a la corriente  $i = v_g \cdot \mathbf{Y}$  que circula por el mismo. Si aumenta la resistencia del circuito, la admitancia disminuye para todas las frecuencias pero esta disminución es más notoria en la vecindad de  $f_r$ , adónde  $X_T$  toma sus valores más bajos. La curva 2 en la fig. 4 corresponde a una combinación con mayor resistencia que la curva 1. La curva 1 tiene una mayor discriminación a favor de las frecuencias próximas a  $f_r$  y se dice entonces que el circuito es “más selectivo”. Como lo muestra la fig. 6a, la corriente es máxima a la frecuencia de resonancia y por lo tanto la potencia que una carga que forma parte de un

circuito resonante puede absorber de un generador es también máxima a  $f_r$ . Se dice que el circuito está “sintonizado” a la frecuencia del generador. La potencia es menor a las frecuencias más bajas y más altas que  $f_r$ . Se considera útil la energía que entrega un generador a una carga, cuando la potencia absorbida no es menor que la mitad de la máxima que podría entregar ese generador a esa carga. Esta condición de media potencia se cumple para una frecuencia menor y una mayor que  $f_r$ , las que denotaremos  $f_1$  y  $f_2$  y que se llaman respectivamente frecuencias de media potencia, límite o de corte inferior y superior.

Partiendo de esta definición, podemos hallar la relación entre la corriente a  $f_r$  y la corriente a  $f_1$  y  $f_2$ :

$$\begin{aligned} f=f_r, \quad P_r &= i_r^2 \cdot R \\ f=f_1, f_2, \quad \frac{P_r}{2} &= i_{f_{1,2}}^2 \cdot R \Rightarrow i_{f_{1,2}} = \frac{i_r}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

A  $f_1$  y  $f_2$  la corriente es igual a la máxima dividida  $\sqrt{2}$ . Como  $Z_r = R$

$$\Rightarrow i_r = \frac{V_g}{R} \Rightarrow i_{f_{1,2}} = \frac{V_g}{\sqrt{2}R} \quad (11)$$

Por lo tanto, a  $f_1$  y  $f_2$  el valor absoluto de la impedancia del circuito tendrá que ser  $\sqrt{2}$  veces la impedancia en resonancia, o sea:  $|Z_{f_{1,2}}| = \sqrt{2} \cdot |Z_r| = \sqrt{2} \cdot R$

Si escribimos la expresión de la impedancia  $Z$ , sacamos  $R$  como factor común y dividimos y multiplicamos los términos entre paréntesis por  $\omega_r$  obtendremos:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R\left[1 + j\left(\frac{\omega \omega_r L}{\omega_r R} - \frac{\omega_r}{\omega \omega_r C R}\right)\right]$$

$$\text{Sustituyendo } Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} \Rightarrow Z = R\left[1 + jQ_r\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right] \quad (12)$$

En la ec. (12), para que la magnitud de la impedancia  $Z$  sea igual a  $\sqrt{2}R$ , el cuadrado de la parte imaginaria de la cantidad entre corchetes debe valer 1, de lo cual se desprenden las ec. (13) y (14):

$$\text{a } f_1, \quad Q_r\left(\frac{\omega_1}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_1}\right) = -1 \quad (13)$$

$$\text{a } f_2, \quad Q_r\left(\frac{\omega_2}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_2}\right) = 1 \quad (14)$$

Hallaremos las frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  a partir de las ec. (13) y (14):

$$Q_r\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_r^2}{\omega_r \omega_1}\right) = -1 \Rightarrow Q_r \omega_1^2 + \omega_r \omega_1 - Q_r \omega_r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Resolviendo la ecuación} \Rightarrow \omega_1 = \frac{-\omega_r \pm \sqrt{\omega_r^2 + 4\omega_r^2 Q_r^2}}{2Q_r} = \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_r}\right)^2} - \frac{1}{2Q_r} \right] \quad (13a)$$

$$Q_r \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_r^2}{\omega_r \cdot \omega_2} \right) = 1 \Rightarrow Q_r \omega_2^2 - \omega_r \omega_2 - Q_r \omega_r^2 = 0 \Rightarrow$$

Resolviendo la ecuación

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_r \pm \sqrt{\omega_r^2 + 4\omega_r^2 Q_r^2}}{2Q_r} = \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_r} \right)^2} + \frac{1}{2Q_r} \right] \quad (14a)$$

Se define el *ancho de banda de potencia mitad* AB como la banda de frecuencias comprendidas entre  $f_1$  y  $f_2$  dentro de la cual la potencia es igual o mayor que la mitad de la potencia máxima.

Restando la ec. (13a) a la (14a) y dividiendo luego entre  $2\pi$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega_2 - \omega_1 &= \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_r} \right)^2} + \frac{1}{2Q_r} \right] - \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_r} \right)^2} - \frac{1}{2Q_r} \right] = \frac{\omega_r}{Q_r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AB = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_r} = \frac{R}{2\pi L} \quad (15) \end{aligned}$$

La agudeza de resonancia de un circuito depende entonces de la relación R/L

Dividiendo la ec. (15) entre  $f_r$  se obtiene

el ancho de banda *relativo*  $AB/f_r$ , el cual es inversamente proporcional al factor  $Q_r$

$$\frac{AB}{f_r} = \frac{f_2 - f_1}{f_r} = \frac{1}{Q_r} \quad (16)$$

Veremos ahora como está distribuido ese ancho de banda con respecto a  $f_r$

*Cálculo exacto:*

$$f_1 \cdot f_2 = f_r \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_r} \right)^2} - \frac{1}{2Q_r} \right] \cdot f_r \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_r} \right)^2} + \frac{1}{2Q_r} \right] = f_r^2 \Rightarrow$$

O sea que  $f_r$  es la media geométrica de las frecuencias de media potencia:

$$\Rightarrow f_r = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad (17)$$

Partiendo de la ec. (12) podemos escribir la corriente en el circuito como

$$i = \frac{V_g}{Z} = \frac{V_g}{R \left[ 1 + jQ_r \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) \right]} \quad (18)$$

Empleando un razonamiento análogo al seguido para  $f_1$  y  $f_2$ , para cada valor posible de  $|i|$  habrá dos frecuencias  $f_a$  y  $f_b$  cuya media geométrica será  $f_r$  que satisfarán la ec. (18). Esto implica que la curva de  $|i|$  en función de  $f$  es simétrica desde el punto de vista *geométrico*.

Si aplicamos logaritmos a la ec. (17), vemos que  $\log(f_r) = \frac{\log(f_a) + \log(f_b)}{2}$

Por lo tanto, si se traza la gráfica de  $|i|$  en función de  $f$  sobre papel semilogarítmico, la misma será una curva simétrica con respecto a  $f_r$ .

*Cálculo aproximado:*

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{f_r}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_r}\right)^2} - \frac{1}{2Q_r} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_r}\right)^2} + \frac{1}{2Q_r} \right] = f_r \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_r}\right)^2}$$

En la mayoría de los circuitos de RF se cumple que  $Q_r \geq 10$ , por lo cual con mucha aproximación:

$$f_r \approx \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (19)$$

De modo que en ese caso, las frecuencias de corte  $f_1$  y  $f_2$  son *aritméticamente* simétricas respecto a  $f_r$ :

$$f_1 = f_r - \frac{AB}{2} \quad (20)$$

$$f_2 = f_r + \frac{AB}{2} \quad (21)$$

En la fig. 7 se han graficado las curvas correspondientes a  $|i|$ ,  $|v_L|$  y  $|v_C|$  para el circuito de la fig. 5. Las tres curvas tienen prácticamente la misma agudeza y las dos curvas de tensión están apenas desplazadas con respecto a la curva de corriente.

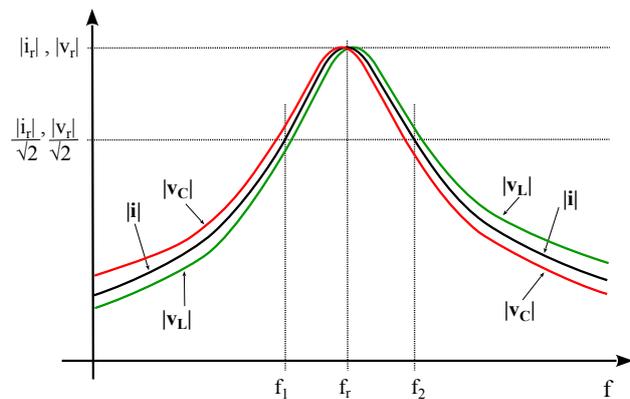


fig. 7

A la frecuencia de resonancia, la corriente  $i$  es:

$$i = \frac{v_g}{R_g + R_s} = \frac{v_g}{R_t}$$

De modo que la tensión a través del capacitor es:

$$|v_C| = \frac{|i|}{\omega_r C} = \frac{|v_g|}{\omega_r C R_t}$$

Pero en resonancia se cumple  $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow |v_C| = |v_g| \frac{\omega_r L}{R_t} = |v_g| \cdot Q_r \quad (22)$

Vemos que la tensión a través del capacitor será  $Q_r$  veces la tensión del generador, a este fenómeno se lo llama *sobretensión de resonancia*.

Para el inductor se puede establecer una *aproximación* similar, ya que todo inductor físico presenta una cierta resistencia óhmica asociada.

En el circuito de la fig. 5, la tensión sobre el inductor es:

$$|v_L| = \frac{|v_g|}{R_t} \sqrt{R_s^2 + X_L^2}$$

Pero, si a la frecuencia de resonancia el factor de mérito del inductor satisface:

$$Q_L = \frac{X_L}{R_s} \geq 10$$

Se puede decir entonces con gran aproximación  $|v_L| \approx |v_g| \frac{X_L}{R_t} = |v_g| \cdot Q_r$  (23)

### Ejemplo numérico

Un inductor de 200  $\mu\text{H}$  tiene un  $Q = 50$  que se supone independiente de la frecuencia. El inductor está conectado en serie con un capacitor de 100 pF y el circuito es alimentado por un generador cuya fem  $v_g = 1 \text{ V}$  y cuya  $R_g = 50 \Omega$ .

Hallar la frecuencia de resonancia,  $f_1$  y  $f_2$  y la tensión  $v_C$  en resonancia.

$$\text{aplicando la ec. (2)} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \text{ H} \cdot 10^{-10} \text{ F}}} = 1,1254 \text{ MHz}$$

$$\text{para } f = f_r, \quad X_L = 2\pi f_r L = 2\pi \cdot 1,1254 \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ H} = 1414 \Omega$$

$$\text{a partir de la def. de } Q \text{ de un inductor} \quad R_s = \frac{X_L}{Q_L} = \frac{1414 \Omega}{50} = 28,28 \Omega$$

$$\text{aplicando la ec. (8)} \quad Q_r = \frac{X_L}{R_g + R_s} = \frac{1414 \Omega}{50 \Omega + 28,28 \Omega} = 18$$

$$\text{aplicando la ec. (16)} \quad AB = \frac{f_r}{Q_r} = \frac{1,1254 \text{ MHz}}{18} = 62,522 \text{ KHz}$$

$$f_1 = f_r - \frac{AB}{2} = 1,1254 \text{ MHz} - \frac{62,522 \text{ KHz}}{2} = 1,094 \text{ MHz}$$

$$f_2 = f_r + \frac{AB}{2} = 1,1254 \text{ MHz} + \frac{62,522 \text{ KHz}}{2} = 1,157 \text{ MHz}$$

$$\text{aplicando la ec. (22)} \quad |v_C| = |v_g| \cdot Q_r = 1 \text{ V} \cdot 18 = 18 \text{ V}$$

### 6.2.4 Respuesta natural del circuito RLC serie

Hasta ahora hemos analizado el circuito RLC serie cuando es excitado por una fuente de señal sinusoidal. Estudiaremos ahora la respuesta de dicho circuito cuando no hay una fuente de señal y la misma depende solamente de los elementos pasivos de la red y de la energía almacenada inicialmente en ellos.

La energía inicial en el instante  $t_0$  puede estar almacenada tanto en el inductor como en el condensador, por lo que la corriente del inductor y la tensión del condensador podrán tener valores iniciales distintos de cero.

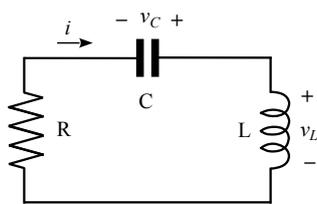


fig. 8

Aplicando la Ley de Kirchhoff de las tensiones, la ecuación de malla del circuito de la fig. 8 es:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \cdot dt - v_C(t_0) = 0 \quad (24)$$

Derivando la ec. (24) respecto al tiempo y dividiendo entre L, se obtiene una ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (25)$$

Si  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  son soluciones linealmente independientes de la ec. (25) y  $A_1$  y  $A_2$  son constantes arbitrarias, la solución general de la ec. (25) tendrá la forma:

$$i(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$$

$y_1(t)$  e  $y_2(t)$  se determinan resolviendo la ecuación característica<sup>1</sup> de la ec. (25):

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (26)$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (27)$$

Dependiendo de los valores de R, L y C, las soluciones  $s_1$  y  $s_2$  pueden ser números reales o números complejos conjugados, dando lugar a respuestas  $i(t)$  fundamentalmente diferentes. Para una mayor claridad conceptual, simplificaremos la ec. (27) haciendo las siguientes sustituciones:

$$\text{Frecuencia de resonancia no amortiguada} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (28a)$$

<sup>1</sup> Tom Apostol, Calculus, vol. 1, cap. 8

Coficiente de amortiguación exponencial o frecuencia neperiana en neper/s . Da una medida de la rapidez con que decae o se *amortigua* la respuesta natural

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (28 b)$$

La ec. (27) deviene entonces la ec. (27a):  $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$  (27 a)

Hay tres casos posibles que dependen de la relación entre los valores de  $\alpha$  y  $\omega_0$  .

### Circuito sobreamortiguado

Sí  $\alpha > \omega_0$  , resulta que  $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$

La ec. (27a) tendrá 2 raíces reales  $s_1$  y  $s_2$  negativas y la respuesta tendrá la forma:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (29)$$

La respuesta es la suma de 2 términos exponenciales decrecientes que tienden a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  , decreciendo uno de ellos más rápidamente que el otro.  $A_1$  y  $A_2$  son constantes que deberán determinarse a partir de las condiciones iniciales.

### Circuito con amortiguamiento crítico

Sí  $\alpha = \omega_0$  , resulta que  $s_1 = s_2 = -\alpha$

La ec. (27a) tendrá una raíz real doble negativa y la respuesta tendrá la forma:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cdot t + A_2) \quad (30)$$

Para hallar a que valor tiende  $i(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  , aplicamos el TM de L' Hopital

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} (A_1 \cdot t + A_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(A_1 \cdot t + A_2)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A_1}{\alpha e^{\alpha t}} = 0$$

El factor de calidad  $Q_r$  del circuito RLC serie con amortiguamiento crítico es:

$$\text{Sí } \alpha = \omega_0 \Rightarrow 1 = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{1}{2Q_r} \Rightarrow Q_r = \frac{1}{2} \quad (31)$$

Se puede demostrar que, para valores dados de L y C, el valor de R que dé un amortiguamiento crítico siempre dará un tiempo de establecimiento menor que cualquier valor de R que produzca una respuesta sobreamortiguada.

**Circuito subamortiguado**

Sí  $\alpha < \omega_0$  , escribimos:  $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

La ec. (27a) tendrá en este caso dos raíces complejas conjugadas:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

El radical en las expresiones de  $s_1$  y  $s_2$  es la *frecuencia de resonancia amortiguada*:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (32)$$

La respuesta tendrá la forma:  $i(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_d \cdot t) + A_2 \text{sen}(\omega_d \cdot t)]$  (33)

En este caso, la respuesta es una función oscilatoria amortiguada de frecuencia  $\omega_d$  y  $\alpha$  es el coeficiente de amortiguamiento. Sí el valor de  $\alpha$  es lo suficientemente grande como para que el circuito esté solo ligeramente subamortiguado, la respuesta decaerá rápidamente y los cruces por cero apenas serán perceptibles.

En la fig. 9 se muestra la respuesta  $i(t)$  del circuito RLC de la fig. 8 manteniendo constantes los valores de L y C y variando R para obtener distintos valores de  $Q_r$  . Se ha asumido que la energía inicial está almacenada en el condensador y que por lo tanto  $i(t_0) = 0$ .

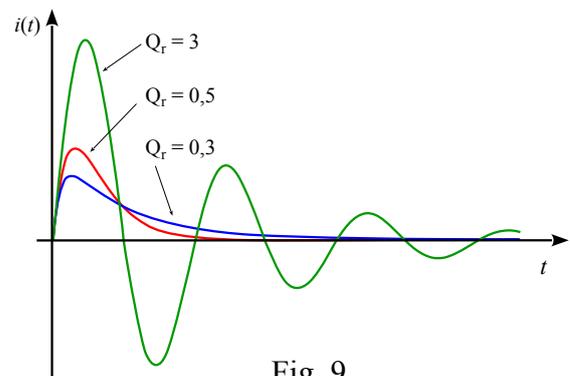


Fig. 9

Aunque teóricamente el tiempo de establecimiento es infinito, pues  $i(t)$  nunca llega a valer cero en un tiempo finito, la respuesta es despreciable después de que la magnitud de  $i(t)$  ha alcanzado valores menores que el 1% de su valor máximo absoluto.

En ingeniería de control se da el nombre de *factor de amortiguamiento relativo* a la razón  $\zeta = \alpha / \omega_0$  . Para un circuito con amortiguamiento crítico  $\zeta = 1$ .

**Ejemplo**

Consideremos el circuito de la fig. 10, el interruptor está inicialmente en la posición 1 y no hay energía almacenada ni en L ni en C, o sea  $i(t) = 0$  y  $v_C(t) = 0$ .

En  $t = 0$  el interruptor conmuta de 1 a 2 y queda en esa posición, esta señal de excitación recibe el nombre de *escalón unitario*  $u(t)$ . Se desea determinar cual es el valor máximo que alcanzará  $i(t)$  y en que instante es que se produce.

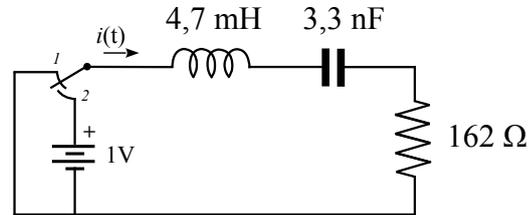


fig. 10

Por la ec. (28b)  $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{162 \Omega}{2 \cdot 4,7 \text{ mH}} = 17234 \text{ neper/s}$

Por la ec. (28a)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4,7 \text{ mH} \cdot 3,3 \text{ nF}}} = 253918 \text{ rad/s}$

Como  $\omega_0 > \alpha$ , se trata de un circuito subamortiguado

Por la ec. (32)  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 253332 \text{ rad/s}$

La ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden es:  $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{162 \Omega}{4,7 \text{ mH}} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{4,7 \text{ mH} \cdot 3,3 \text{ nF}} i = 0$

La respuesta tendrá la forma de la ec. (33):  $i(t) = e^{-17234 \cdot t} [A_1 \cos(253332 \cdot t) + A_2 \text{sen}(253332 \cdot t)]$

$$i(t) = 0 \text{ para } t < 0, \Rightarrow i(0) = e^0 [A_1 \cos(0) + A_2 \text{sen}(0)] = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

Al aplicar  $u(t) = 1V$  en  $t = 0$ , tenemos:  $v_L = L \frac{di}{dt} = 1V \Rightarrow \frac{di}{dt}(0) = \frac{1V}{4,7 \text{ mH}} = 213 \text{ A/s}$

Derivando la expresión de  $i(t)$  con  $A_1 = 0$ , obtenemos:

$$\frac{di}{dt} = e^{-17234 \cdot t} [-17234 \cdot A_2 \text{sen}(253332 \cdot t) + 253332 \cdot A_2 \cos(253332 \cdot t)]$$

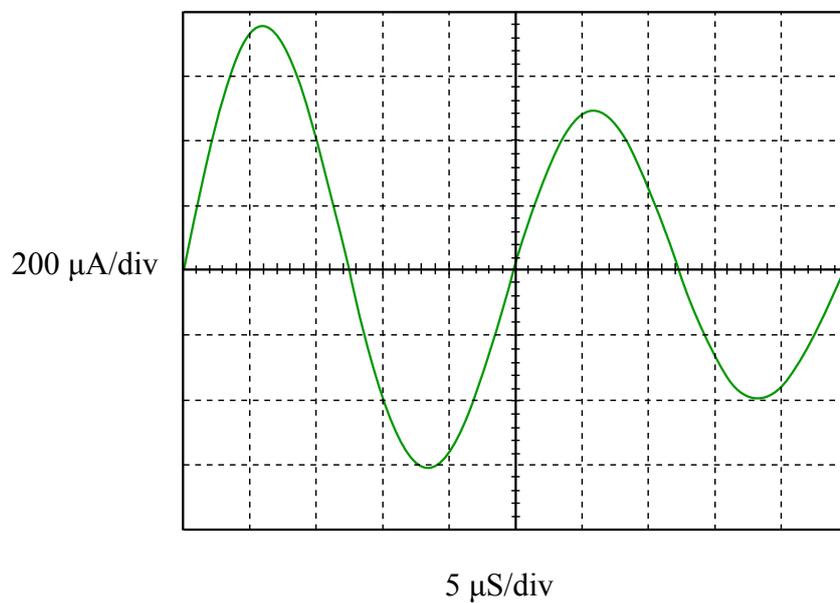
$$\frac{di}{dt}(0) = e^0[0 + 253332 \cdot A_2 \cos(0)] = 213 \text{ A/s} \Rightarrow A_2 = \frac{213 \text{ A/s}}{253332 \text{ r/s}} = 840,8 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow i(t) = e^{-17234 \cdot t} \cdot 840,8 \cdot 10^{-6} \text{ sen}(253332 \text{ r/s} \cdot t)$$

El máximo valor de  $i(t)$  ocurrirá para  $t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{\omega_d} \cdot \frac{1}{4} = 6,2 \mu\text{s}$

$$i(T/4) = e^{-17234 \cdot 6,2 \cdot 10^{-6}} \cdot 840,8 \cdot 10^{-6} \text{ sen}(253332 \text{ r/s} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 755,6 \mu\text{A}$$

En la figura se reproduce el oscilograma de  $i(t)$



### 6.3 Resonancia en paralelo

En la resonancia en paralelo o antiresonancia, dos susceptancias iguales y opuestas se neutralizan, de modo que la admitancia es mínima a la frecuencia de resonancia. En el circuito de la fig. 11, la  $R_S$  representa a la resistencia del alambre del inductor. Si dicha resistencia fuera 0 ohms, en resonancia la admitancia sería cero y por consiguiente la corriente  $i_T$  también sería cero. En la fig. 12 están representados los diagramas fasoriales de este circuito para  $f < f_r$ ,  $f = f_r$  y  $f > f_r$ .

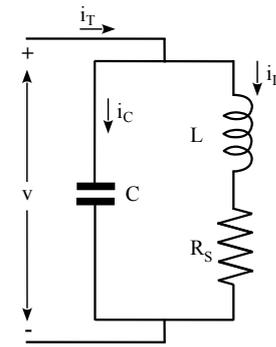


fig. 11

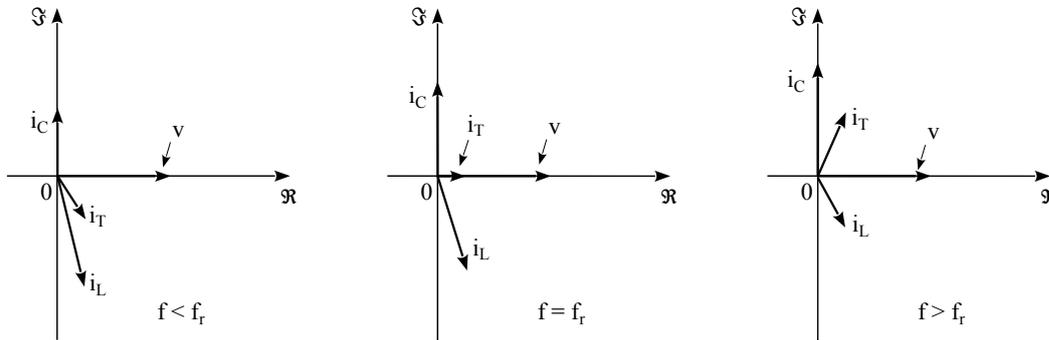


fig. 12

A la frecuencia de resonancia, la tensión  $v$  y la corriente  $i_T$  están en fase, o sea que el factor de potencia vale 1. En frecuencias inferiores a la de resonancia el circuito es inductivo y por encima de la resonancia es capacitivo.

La admitancia del circuito será la suma de las admitancias de ambas ramas:

$$Y_T = Y_L + Y_C = \frac{1}{R_S + jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{R_S + j(X_L - X_C)}{(R_S + jX_L)(-jX_C)} \quad (34)$$

La impedancia del circuito  $Z_T$  es el recíproco de la suma de la ec. (34):

$$Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{X_L X_C - jR_S X_C}{R_S + j(X_L - X_C)}$$

Racionalizando. se obtiene la ec. (35)

$$Z_T = \frac{R_S X_C^2}{R_S^2 + (X_L - X_C)^2} + j \frac{(X_C^2 X_L - X_C X_L^2 - R_S^2 X_C)}{R_S^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (35)$$

Para que el factor de potencia valga 1,  $Z_T$  debe ser una resistencia pura, por lo tanto la parte imaginaria de la ec. (35) debe ser igual a cero. Despejando, obtenemos el criterio para factor de potencia 1, ec. (36).

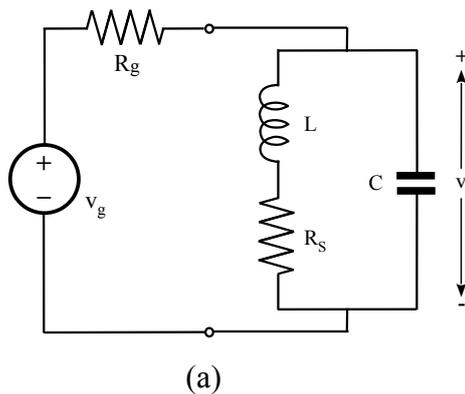
$$X_C^2 X_L - X_C X_L^2 - R_S^2 X_C = 0$$

$$\Rightarrow R_S^2 = X_L (X_C - X_L) \quad (36)$$

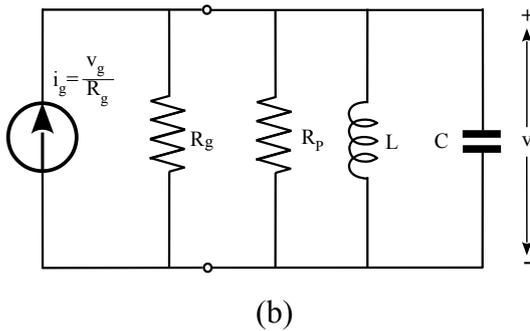
En los circuitos de RF normalmente se cumple que  $X_L \gg R_S$ , con lo cual la ec. (36) se reduce aproximadamente a  $X_L = X_C$  y la  $f_r$  queda entonces determinada por la ec. (37).

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (37)$$

### 6.3.1 Circuito equivalente paralelo



Para analizar el comportamiento del circuito de la fig. 13(a), es conveniente transformarlo a su circuito equivalente paralelo. Para ello se halla el equivalente en paralelo de la rama L- $R_S$  y se le aplica al generador el TM de Norton, obteniéndose el circuito (b). Luego se sustituye el paralelo de  $R_g$  y  $R_p$  por  $R_{eq}$  y se obtiene así el circuito equivalente (c).



Por el TM de Norton,  $i_g = \frac{V_g}{R_g} \quad (38)$

La admitancia  $Y_L$  de la rama L- $R_S$  es:

$$Y_L = \frac{1}{R_S + j\omega L} = \frac{R_S - j\omega L}{R_S^2 + (\omega L)^2}$$

Si  $Q_L \geq 10 \Rightarrow (\omega L)^2 \gg R_S^2$

$$\Rightarrow Y_L \approx \frac{R_S}{(\omega L)^2} - \frac{j}{\omega L} \quad (39)$$

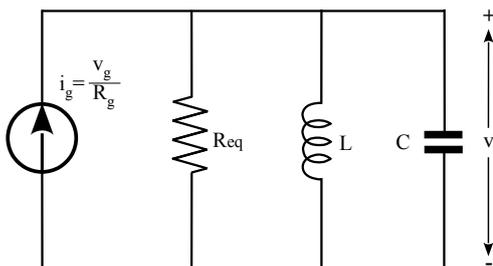
El equivalente de la rama L- $R_S$  es el paralelo de L y  $R_p$ ,

$$R_p = \frac{(\omega L)^2}{R_S} \quad (40)$$

cuyo valor es:

$$R_{eq} = \frac{R_g \cdot R_p}{R_g + R_p} = \frac{(\omega L)^2}{R_S + (\omega L)^2 / R_g} \quad (41)$$

Fig. 13 (c)



**6.3.2 Curvas de susceptancia y lugares geométricos de Y y Z**

La admitancia total  $Y_T$  del circuito de la fig. 13(c) es la suma de las admitancias de las tres ramas.

$$Y_T = G_{eq} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (42)$$

Comparando la ec. (42) con la ec. (1) correspondiente al circuito en serie, vemos que estos dos circuitos son duales, o sea, las ecuaciones son idénticas excepto por el intercambio de impedancia y admitancia. La admitancia del circuito en paralelo se comporta frente a las variaciones de frecuencia del mismo modo que la impedancia del circuito serie. Basándonos en el principio de dualidad, podemos trazar los diagramas polares de admitancia e impedancia y las curvas de susceptancia y reactancia del circuito en paralelo, fig. 14.

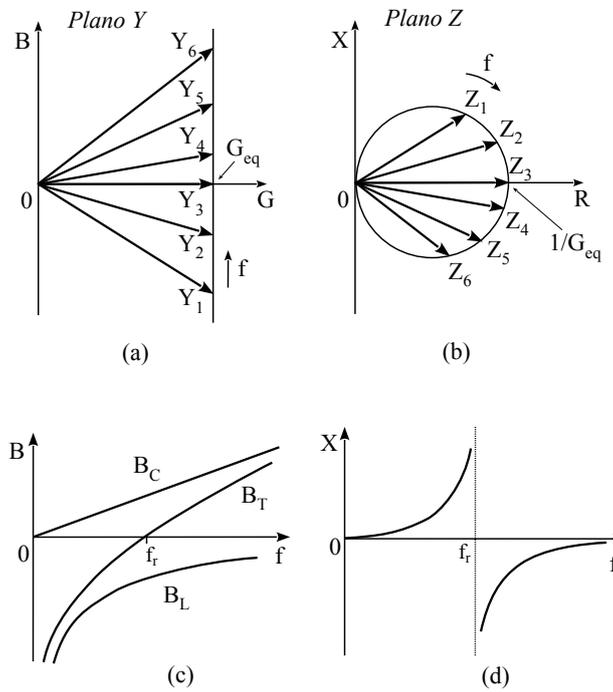


fig. 14

**6.3.3 Factor de calidad**

La potencia media disipada en el circuito de la fig. 13(c) es:  $P = \frac{|V|^2}{R_{eq}} \quad (43)$

En tanto que la energía máxima almacenada en el inductor es:

$$w_{L\ max} = |i_L|^2 L = \left(\frac{|V|}{\omega L}\right)^2 L = \frac{|V|^2}{\omega^2 L} \quad (44)$$

A la frecuencia de resonancia, la energía máxima almacenada es la misma para el inductor que para el capacitor. Sustituyendo en la definición de Q las expresiones de las ec. (43) y (44) obtenemos el  $Q_{ar}$  :

$$Q = \omega \frac{\text{max. energía almacenada}}{P \text{ media disipada}} \Rightarrow Q_{ar} = \omega_r \frac{|V|^2 / \omega_r^2 L}{|V|^2 / R_{eq}} = \frac{R_{eq}}{\omega_r L} \quad (45)$$

### 6.3.4 Agudeza de resonancia

Hemos visto que el lugar geométrico de la impedancia de un circuito resonante paralelo es una circunferencia en el plano  $Z$ , obteniéndose el valor máximo  $\mathbf{Z} = 1/G_{eq} = R_{eq}$  a la frecuencia de resonancia. Alternativamente, podemos representar  $|\mathbf{Z}|$  en función de la frecuencia en un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se ve en la fig. 15.

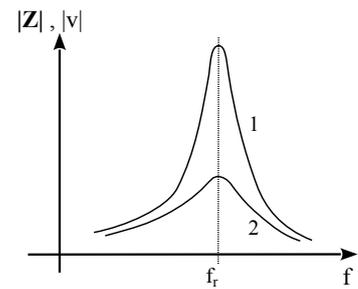


fig. 15

Cuando se alimenta al circuito con una corriente constante, la ordenada en la fig.15 también representa a la tensión  $v = i_g \cdot \mathbf{Z}$  aplicada al mismo, la cual también será máxima a la frecuencia de resonancia. La curva 1 corresponde a un valor alto de  $R_{eq}$  y la curva 2 a un valor más bajo.

Buscaremos ahora las frecuencias de media potencia  $f_1$  y  $f_2$ .

Partiendo de la definición, podemos hallar la relación entre la tensión a  $f_r$  y la tensión a  $f_1$  y  $f_2$ :

$$f = f_r, \quad P_r = v_r^2 \cdot G_{eq} \quad \Rightarrow \quad v_{f_{1,2}} = \frac{v_r}{\sqrt{2}} \quad (46)$$

$$f = f_1, f_2, \quad \frac{P_r}{2} = v_{f_{1,2}}^2 \cdot G_{eq}$$

A  $f_1$  y  $f_2$  la tensión es igual a la máxima sobre  $\sqrt{2}$ . Como  $Y_r = G_{eq}$

$$\Rightarrow v_r = \frac{i_g}{G_{eq}} \quad \Rightarrow \quad v_{f_{1,2}} = \frac{i_g}{\sqrt{2} G_{eq}} \quad (47)$$

Por lo tanto, a  $f_1$  y  $f_2$  el valor absoluto de la admitancia del circuito tendrá que ser  $\sqrt{2}$  veces la admitancia en resonancia, o sea:  $|Y_{f_{1,2}}| = \sqrt{2} \cdot |Y_r| = \sqrt{2} \cdot G_{eq}$

Si escribimos la expresión de la admitancia  $\mathbf{Y}$ , sacamos  $R_{eq}$  como factor común y dividimos y multiplicamos los términos entre paréntesis por  $\omega_r$  obtenemos

$$\mathbf{Y} = G_{eq} + jB_T = \frac{1}{R_{eq}} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{R_{eq}} \left[1 + j\left(\frac{\omega \omega_r C R_{eq}}{\omega_r} - \frac{\omega_r R_{eq}}{\omega \omega_r L}\right)\right]$$

$$\text{Sustituyendo } Q_{ar} = \frac{R_{eq}}{\omega_r L} = \omega_r C R_{eq} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{R_{eq}} \left[1 + jQ_{ar} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right] \quad (48)$$

La ec. (48) es dual de la ec. (12). Si seguimos un razonamiento similar al efectuado para el circuito serie llegaremos a las ec. (49) y (50), las cuales expresan  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en función de  $\omega_r$  y del  $Q_{ar}$ .

$$\omega_1 = \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_{ar}}\right)^2} - \frac{1}{2Q_{ar}} \right] \quad (49) \quad , \quad \omega_2 = \omega_r \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_{ar}}\right)^2} + \frac{1}{2Q_{ar}} \right] \quad (50)$$

Restando la ecuación (49) a la (50), operando y dividiendo entre  $2\pi$ , se obtiene la ecuación (51):

$$\frac{AB}{f_r} = \frac{f_2 - f_1}{f_r} = \frac{1}{Q_{ar}} \quad (51)$$

El ancho de banda *relativo*  $AB/f_r$  de un circuito resonante paralelo es inversamente proporcional al factor  $Q_{ar}$ , o sea que es más selectivo cuando la impedancia del generador es alta. Este caso es común en los circuitos de RF y por ello la resonancia en paralelo se usa mucho más que la resonancia en serie.

Para estudiar como se distribuye ese ancho de banda, se procede como en el caso de circuito serie y se obtiene:

$$f_r = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad (52)$$

También en este caso es válida la solución aproximada:

$$f_r \approx \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (53)$$

A la frecuencia de resonancia, la corriente a través del capacitor es:

$$|i_c| = \frac{|v|}{1/\omega_r C} = \frac{|i_g| R_{eq}}{1/\omega_r C}$$

En resonancia se cumple que  $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow |i_c| = |i_g| \frac{R_{eq}}{\omega_r L} = |i_g| \cdot Q_{ar}$  (54)

Vemos que la corriente que circula a través del capacitor será  $Q_{ar}$  veces la corriente del generador.

Para el inductor se puede establecer una *aproximación* similar. Recordemos que el circuito de la fig. 13(c) es sólo un equivalente aproximado del circuito de la fig. 13(a), todo inductor físico presenta una cierta resistencia óhmica asociada y la corriente que nos interesa es la de ese inductor físico.

En el circuito de la fig. 13(a), la corriente que circula realmente a través del inductor es:

$$|i_L| = \frac{|v|}{\sqrt{R_s^2 + X_L^2}} = |i_g| \frac{R_{eq}}{\sqrt{R_s^2 + X_L^2}}$$

Si a la frecuencia de resonancia el factor de mérito del inductor satisface la condición:

$$Q_L = \frac{X_L}{R_s} \geq 10$$

Se puede decir con gran aproximación que:

$$|i_L| \approx |i_g| \frac{R_{eq}}{X_L} = |i_g| \cdot Q_{ar} \quad (55)$$

**Ejemplo numérico**

Un inductor de 200  $\mu\text{H}$  tiene un  $Q = 50$  que se supone independiente de la frecuencia. El inductor está conectado en paralelo con un capacitor de 100 pF y el circuito es alimentado por un generador cuya fem  $v_g = 10 \text{ V}$  y cuya  $R_g = 100 \text{ K}$ . Hallar la frecuencia de resonancia,  $f_1$  y  $f_2$  y la corriente  $i_c$  en resonancia.

$$\text{aplicando la ec. (37)} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \text{ H} \cdot 10^{-10} \text{ F}}} = 1,1254 \text{ MHz}$$

$$\text{para } f = f_r, \quad X_L = 2\pi f_r L = 2\pi \cdot 1,1254 \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ H} = 1414 \Omega$$

$$\text{a partir de la def. de } Q \text{ de un inductor} \quad R_s = \frac{X_L}{Q} = \frac{1414 \Omega}{50} = 28,28 \Omega$$

Debemos hallar ahora el circuito equivalente paralelo:

$$i_g = \frac{v_g}{R_g} = \frac{10 \text{ V}}{100 \text{ K}} = 100 \mu \text{ A}, \quad R_p = \frac{X_L^2}{R_s} = \frac{(1414 \Omega)^2}{28,28 \Omega} = 70,7 \text{ K}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_g \cdot R_p}{R_g + R_p} = \frac{100 \text{ K} \cdot 70,7 \text{ K}}{100 \text{ K} + 70,7 \text{ K}} = 41,42 \text{ K}$$

$$\text{aplicando la ec. (45)} \quad Q_{\text{ar}} = \frac{R_{\text{eq}}}{X_L} = \frac{41,42 \text{ K}}{1414 \Omega} = 29,3$$

$$\text{aplicando la ec. (51)} \quad AB = \frac{f_r}{Q_{\text{ar}}} = \frac{1,1254 \text{ MHz}}{29,3} = 38,41 \text{ KHz}$$

$$f_1 = f_r - \frac{AB}{2} = 1,1254 \text{ MHz} - \frac{38,41 \text{ KHz}}{2} = 1,106 \text{ MHz}$$

$$f_2 = f_r + \frac{AB}{2} = 1,1254 \text{ MHz} + \frac{38,41 \text{ KHz}}{2} = 1,145 \text{ MHz}$$

$$\text{aplicando la ec. (54)} \quad |i_c| = |i_g| \cdot Q_{\text{ar}} = 100 \mu \text{ A} \cdot 29,3 = 2,93 \text{ mA}$$

**Bibliografía**

Everitt y Anner, Ingeniería de Comunicaciones

Hayt y Kemmerly, Análisis de circuitos en ingeniería

Tom Apostol, Calculus