

8. Respuesta de frecuencia

Ing. Fernando Ubiría, Ing. Pedro Castro

8.1 Filtro pasaaltos

En el circuito divisor de tensión de la fig. 1, la tensión de salida es tomada a través de la resistencia. A las frecuencias más bajas, la reactancia del capacitor será mayor y ello reducirá la salida, en tanto que las frecuencias más altas no se verán atenuadas apreciablemente.

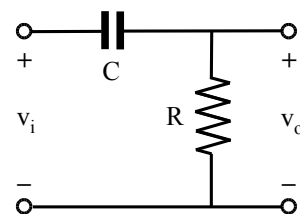


fig. 1

Se define como frecuencia de corte f_1 del filtro aquella frecuencia a la cual la potencia P_o entregada a la salida sea la mitad de la máxima posible.

La condición para que ello ocurra es:

$$\frac{P_{o\max}}{2} = \frac{(v_i/\sqrt{2})^2}{R} \Rightarrow \left| 1 - \frac{jX_C}{R} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow |X_C| = R$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte f_1 estará dada por

$$f_1 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2)$$

Queremos encontrar una expresión de la amplificación de tensión en función de la frecuencia en la que también intervenga f_1 . Para ello despejamos el valor de R en la ec. (2) y lo sustituimos

en la ec. (1). Pasando luego a la forma polar y dividiendo entre v_i :

$$v_o = \frac{v_i}{1 - j \frac{2\pi f_1 C}{2\pi f C}} = \frac{v_i}{1 - j \frac{f_1}{f}} \quad (3)$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f)^2}} \angle \tan^{-1}(f_1/f)$$

Por lo tanto, tenemos que a la frecuencia de corte f_1 la amplificación de tensión será:

$$a \quad f = f_1 \quad A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \quad (4)$$

Observando la ec. (3), podemos ver que la amplificación de tensión aumenta con la frecuencia. Estudiando formalmente módulo y argumento de A_v tenemos:

$$\lim_{f \rightarrow 0} |A_v| = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f)^2}} = 0$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} \tan^{-1}(f_1/f) = 90^\circ$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |A_v| = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f)^2}} = 1$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \tan^{-1}(f_1/f) = 0$$

$$\frac{d|A_v|}{df} = [1 + (f_1/f)^2]^{-3/2} \frac{f_1^2}{f^3} > 0 \quad \forall f$$

$$\frac{d \tan^{-1}(f_1/f)}{df} = \frac{-f_1}{f^2 + f_1^2} < 0 \quad \forall f$$

Vemos que $|A_v|$ es estrictamente creciente y su argumento es estrictamente decreciente. Podemos ahora trazar una gráfica que represente el comportamiento del filtro pasaaltos, a dicha gráfica se la llama diagrama de Bode¹ y consta de dos diagramas separados. El diagrama de magnitud representa el módulo de la función de transferencia A_v en decibeles en función de la frecuencia. El diagrama de fase representa la fase de la función de transferencia en función de la frecuencia. En ambos casos, la escala de la frecuencia es logarítmica.

A la frecuencia de corte f_1 :

$$A_{v_{dB}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

En tanto que para las frecuencias altas, $f \rightarrow \infty$:

$$A_{v_{dB}} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Las frecuencias superiores a f_1 constituyen la *banda pasante* del filtro. Las frecuencias inferiores a f_1 son atenuadas, siendo la pendiente del flanco de este filtro simple de 6 dB por octava o sea 20 dB por década.

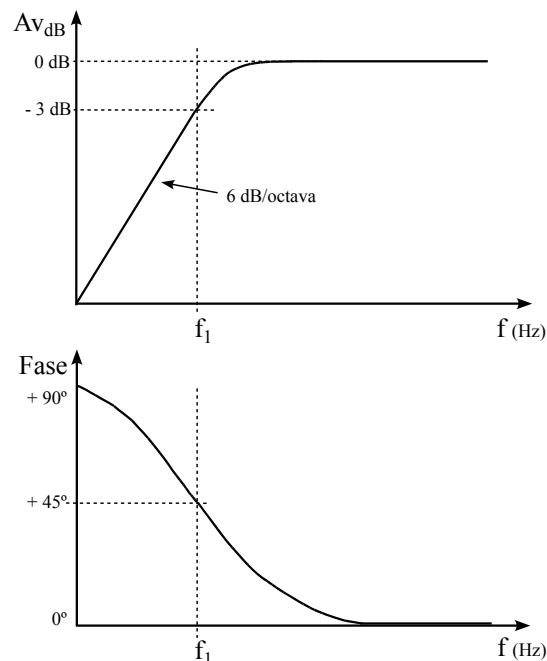


fig. 2

1 Hendrik Wade Bode (1905-1982), Bell Laboratories

8.2 Filtro pasabajos

En el circuito divisor de tensión de la fig. 3, la tensión de salida es tomada a través del capacitor. A las frecuencias más altas, la reactancia del capacitor será menor y ello reducirá la salida, en tanto que las frecuencias más bajas no se verán atenuadas apreciablemente.

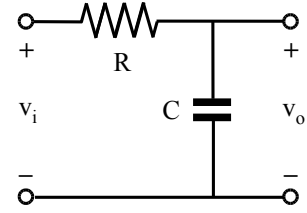


fig. 3

Se define como frecuencia de corte f_2 del filtro aquella frecuencia a la cual la potencia P_o entregada a la salida sea la mitad de la máxima posible, la tensión de salida a f_2 será entonces $v_o = v_i / \sqrt{2}$

$$v_o = \frac{v_i(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{v_i}{1 + j\frac{R}{X_C}} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \left| 1 + j\frac{R}{X_C} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow |X_C| = R$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte f_2 estará dada por

$$f_2 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (6)$$

Queremos encontrar una expresión de la amplificación de tensión en función de la frecuencia en la que también intervenga f_2 . Para ello despejamos el valor de R en la ec. (6) y lo sustituimos

$$v_o = \frac{v_i}{1 + j\frac{2\pi f C}{2\pi f_2 C}} = \frac{v_i}{1 + j\frac{f}{f_2}}$$

en la ec. (5). Pasando a la forma polar y dividiendo entre v_i :

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}} \angle -\tan^{-1}(f/f_2) \quad (7)$$

Por lo tanto, a la frecuencia de corte f_2 la amplificación de tensión será:

$$\text{a } f = f_2 \quad A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \quad (8)$$

Observando la ec. (8), podemos ver que la amplificación de tensión disminuye con la frecuencia. Estudiando formalmente módulo y argumento de A_v tenemos:

$$\lim_{f \rightarrow 0} |A_v| = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}} = 1$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} -\tan^{-1}(f/f_2) = 0$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |A_v| = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}} = 0$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} -\tan^{-1}(f/f_2) = -90^\circ$$

$$\frac{d|A_v|}{df} = -[1 + (f/f_2)^2]^{-3/2} \frac{f}{f_2^2} < 0 \quad \forall f$$

$$\frac{d \tan^{-1}(f/f_2)}{df} = \frac{-1}{f_2 + f^2/f_2} < 0 \quad \forall f$$

Vemos que tanto $|A_v|$ como su argumento son estrictamente decrecientes. Ahora podemos trazar el diagrama de Bode del filtro pasabajos.

A la frecuencia de corte f_2 :

$$A_{v_{dB}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

En tanto que para las frecuencias bajas, $f \rightarrow 0$:

$$A_{v_{dB}} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Las frecuencias inferiores a f_2 constituyen la *banda pasante* del filtro. Las frecuencias superiores a f_2 son atenuadas, siendo la pendiente del flanco de este filtro simple de 6 dB por octava o sea 20 dB por década.

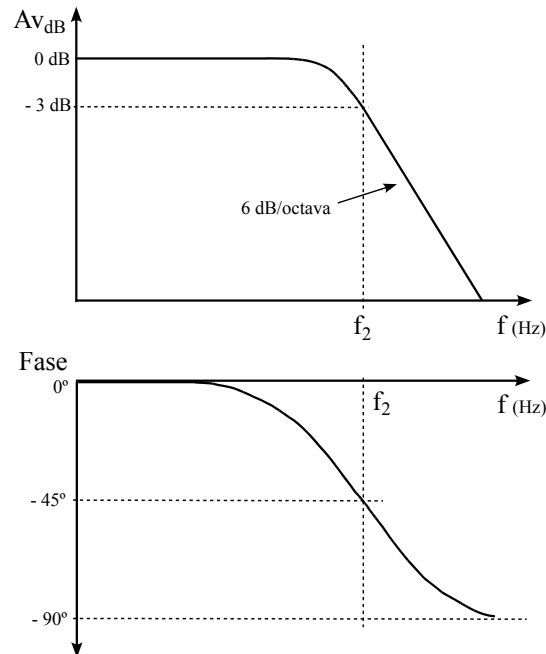


fig. 4

8.3 Acoplamiento R-C

En una etapa amplificadora existen ambos filtros, pasabajos y pasaaltos, los mismos se deben a las resistencias de polarización, los parámetros de los dispositivos y las capacidades tanto internas como externas. Las capacidades externas se deben a los capacitores de acople, los cuales se utilizan para separar la polarización de continua de las diferentes etapas. Por estar en serie, estos capacitores dan origen a un filtro pasaaltos, en lo posible deben ser grandes para lograr una f_1 baja. Las capacidades internas se deben a la constitución física del dispositivo y a las capacidades parásitas entre los conductores, aparecen en paralelo con el circuito y dan así origen a un filtro pasabajos. Tenemos que mantener su valor lo mas pequeño posible para lograr una f_2 lo más alta posible. En la fig. 5 podemos ver el circuito equivalente general de una etapa amplificadora con acoplamiento R-C. Allí podemos ver los capacitores de acople C_{c1} y C_{c2} , así como las capacidades internas C_i y C_o .

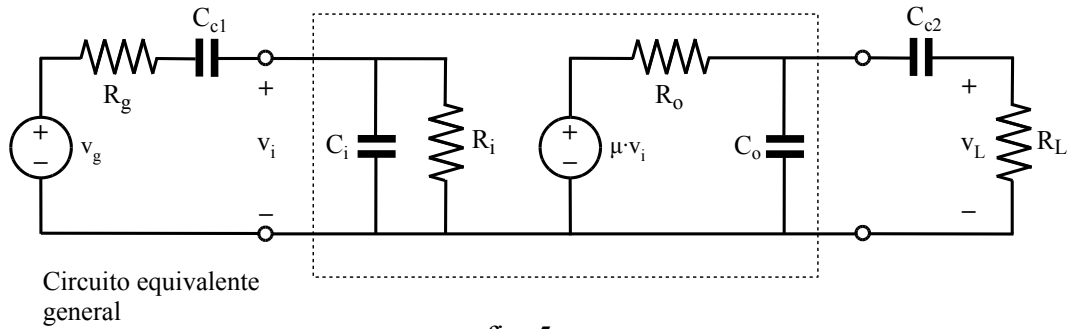


fig. 5

Para estudiar el comportamiento de una etapa amplificadora no es necesario trabajar con una ecuación general de ganancia, ya que el filtro pasabajos no afecta en las frecuencias bajas y el filtro pasaaltos no lo hace en las frecuencias altas. Se divide entonces la gama de frecuencias en que trabaja el amplificador en 3 rangos:

- **frecuencias bajas** para las frecuencias menores que f_1
- **frecuencias medias** para las frecuencias entre f_1 y f_2
- **frecuencias altas** para las frecuencias mayores que f_2

8.3.1 Análisis para frecuencias medias

En las frecuencias medias se puede despreciar el efecto de todas las capacidades, de modo que el circuito equivalente resultante es el de la fig. 6 y su amplificación de tensión A_{v_m} será la máxima

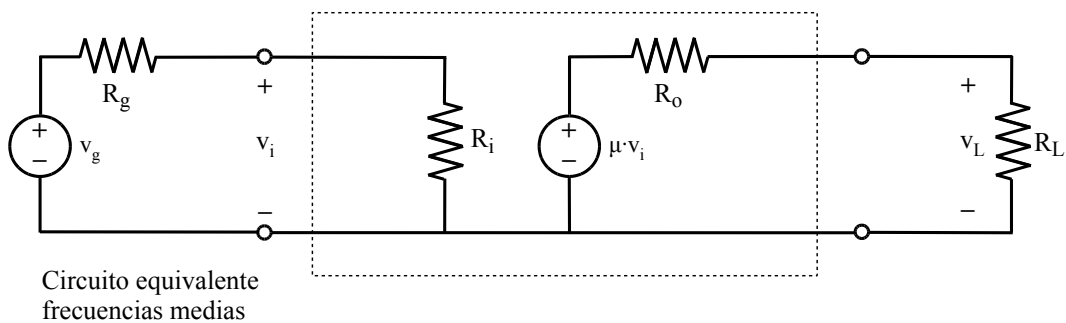


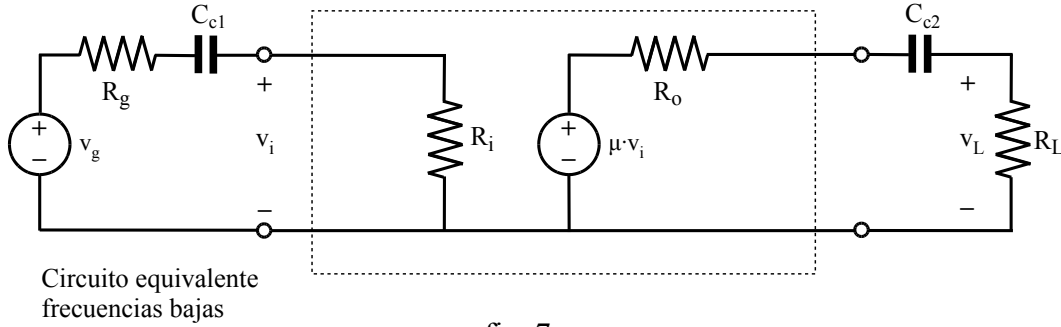
fig. 6

Este circuito es similar al amplificador no ideal de tensión que estudiamos en el capítulo 7 siendo

$$A_{v_m} = \frac{v_L}{v_i} = \frac{\mu \cdot R_L}{R_o + R_L} \quad (9)$$

8.3.2 Análisis para frecuencias bajas

En las frecuencias bajas, el efecto de C_i y C_o puede ser despreciado debido a que sus reactancias son muy grandes. La reactancia de los capacitores de acople también aumenta a medida que disminuye la frecuencia y como están en serie, tienen que ser considerados al calcular la amplificación de tensión.



Estudiaremos el efecto del capacitor de acople de salida C_{c2} sobre la amplificación de tensión. El efecto del capacitor de entrada C_{c1} se estudia de forma similar, como una atenuación de la fuente de señal.

La tensión sobre la resistencia de carga R_L será:

$$v_L = \frac{\mu \cdot v_i \cdot R_L}{(R_o + \frac{1}{j\omega C_{c2}}) + R_L} = \frac{\mu \cdot v_i \cdot R_L}{(R_o + R_L)(1 + \frac{1}{j\omega C_{c2}(R_o + R_L)})}$$

Dividiendo entre v_i , sustituyendo la ec. (9) y pasando a la forma polar obtenemos

$$Av = \frac{v_L}{v_i} = \frac{Av_m}{1 + \frac{1}{j\omega C_{c2}(R_o + R_L)}} = \frac{Av_m}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega C_{c2}(R_o + R_L)})^2}} \angle \text{tg}^{-1} \frac{1}{\omega C_{c2}(R_o + R_L)} \quad (10)$$

Nos interesa calcular la frecuencia de corte f_1

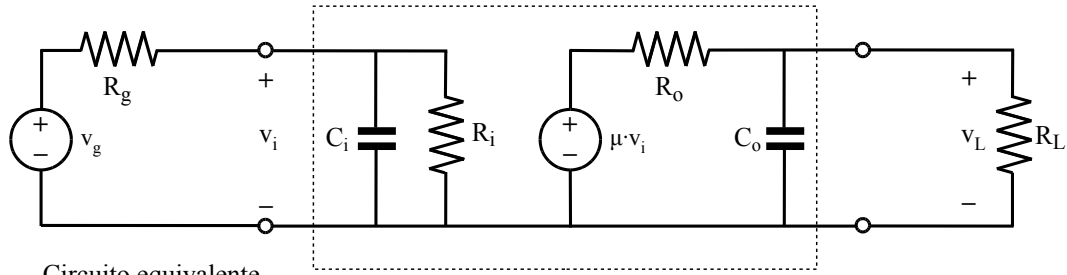
$$\text{a } f = f_1 \quad |Av| = \frac{|Av_m|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_1 C_{c2}(R_o + R_L)} = 1$$

Despejando, obtenemos la frecuencia de corte f_1 debida al efecto de C_{c2} sobre el circuito de salida

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_{c2}(R_o + R_L)} \quad (11)$$

8.3.3 Análisis para frecuencias altas

En las frecuencias altas, el efecto de C_{c1} y C_{c2} puede ser despreciado debido a que sus reactancias son muy pequeñas. La reactancia de las capacidades internas también disminuye a medida que aumenta la frecuencia y como están en paralelo, tienen que ser consideradas al calcular la amplificación de tensión.



Circuito equivalente
frecuencia altas

fig. 8

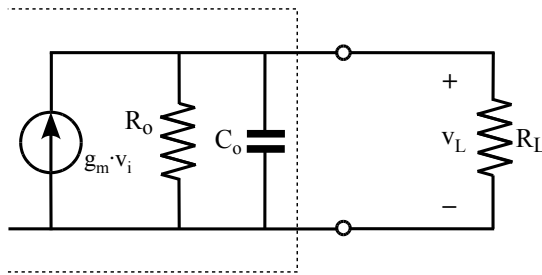


fig. 9

Aplicamos el teorema de Norton al circuito de salida, fig. 9 y definimos $g_m = \mu/R_o$

$$\text{obteniendo: } i_{cc} = \frac{\mu \cdot v_i}{R_o} = g_m \cdot v_i$$

$$\text{Definimos además: } R_{eq} = \frac{R_o \cdot R_L}{R_o + R_L}$$

Sustituimos en la ec. (9) las definiciones de g_m y R_{eq} y obtenemos la ec. equivalente (12)

$$A_{v_m} = \frac{v_L}{v_i} = g_m \cdot R_{eq} \quad (12)$$

La tensión sobre la resistencia de carga R_L es

$$v_L = \frac{g_m \cdot v_i \cdot R_{eq}}{R_{eq} + \frac{1}{j\omega C_o}} \cdot \frac{1}{j\omega C_o} = \frac{g_m \cdot v_i \cdot R_{eq}}{j\omega C_o R_{eq} + 1}$$

Dividiendo entre v_i , sustituyendo la ec. (12) y pasando a la forma polar

$$\text{obtenemos } A_v = \frac{v_L}{v_i} = \frac{A_{v_m}}{1 + j\omega C_o R_{eq}} = \frac{A_{v_m}}{\sqrt{1 + (\omega C_o R_{eq})^2}} \angle -\tan^{-1} \omega C_o R_{eq} \quad (13)$$

Nos interesa calcular la frecuencia de corte f_2

$$\text{a } f = f_2 \quad |A_v| = \frac{|A_{v_m}|}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi C_o R_{eq}} \quad (14)$$

8.4 Distorsión en los amplificadores

Si se aplica una señal a la entrada de un amplificador ideal, a la salida debería aparecer una señal idéntica. En los amplificadores reales, la forma de onda de la salida generalmente no es una réplica exacta de la señal de entrada, ya que pueden presentarse varios tipos de *distorsión*.

Distorsión no lineal Es debida a la curva de transferencia no lineal de los dispositivos activos y se manifiesta en la aparición en la salida de nuevas frecuencias que no están presentes en la señal de entrada.

Distorsión de frecuencia Este tipo de distorsión aparece cuando las componentes de diferentes frecuencias de la señal se amplifican de modo distinto. Si $|A_v|$ varía dentro del margen de frecuencias considerado, habrá distorsión de frecuencia.

Distorsión de fase Esta distorsión procede del desigual cambio de fase de las señales de diferentes frecuencias. Se debe a que el ángulo de fase de la ganancia compleja $A_v \angle \theta$ depende de la frecuencia.

8.4.1 Diagrama de Bode

El diagrama de Bode de una etapa amplificadora nos permite evaluar en que medida la misma producirá distorsión de frecuencia y de fase sobre la señal de entrada. Este diagrama estará compuesto por la combinación del diagrama de un filtro pasaaltos y de un filtro pasabajos. El margen de frecuencias comprendido entre f_1 y f_2 se denomina *ancho de banda* del amplificador. Para tener una idea del comportamiento del amplificador, podemos trazar sobre papel semilogarítmico una aproximación lineal de la curva de la siguiente manera:

- 1) La máxima amplificación de tensión que podemos lograr es para frecuencias medias. Calculamos A_{v_m} utilizando el circuito equivalente para frecuencias medias y trazamos una línea horizontal para el valor hallado.
- 2) Sabemos que para las frecuencias bajas y altas la amplificación va a ir disminuyendo y que los puntos críticos son f_1 y f_2 . Marcamos la intersección de estas dos frecuencias con la línea de A_{v_m} .

Partiendo de f_1 y f_2 , calculamos en base a la pendiente del flanco la amplificación relativa a A_{v_m} para una frecuencia la mitad de f_1 y otra el doble de f_2 si trabajamos por octavas y marcamos esos puntos en el papel.

- 3) Trazamos entonces una línea que una la intersección de $A_{v_m}-f_1$ con el punto de la A_v en $f_1/2$ y otra que una la intersección de $A_{v_m}-f_2$ con la A_v en $2 \cdot f_2$.

La curva estará por debajo de la aproximación lineal.

- 4) Para trazar la curva, es conveniente tener al menos otros dos puntos. Usualmente se calcula para ello la amplificación en $2 \cdot f_1$ y $f_2/2$.

En la fig. 10 vemos un ejemplo para una etapa con $f_1 = 10$ Hz y $f_2 = 10$ kHz

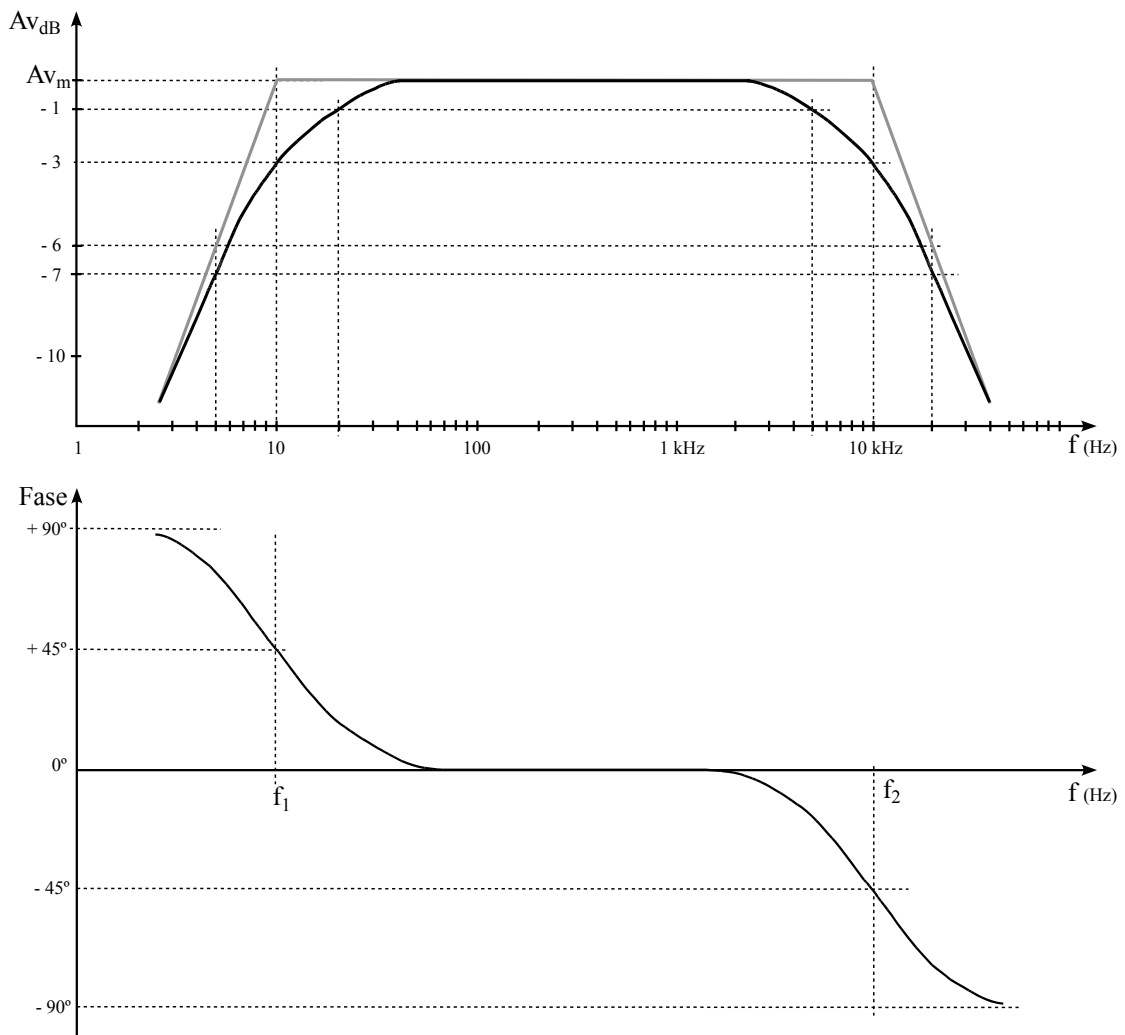


fig. 10

8.4.2 Ancho de banda de n etapas en cascada

Calcularemos ahora las frecuencias de corte de n etapas en cascada $f_1^{(n)}$ y $f_2^{(n)}$ para el caso en que las frecuencias de corte individuales sean las mismas.

A partir de la ec. (7) podemos calcular la amplificación de tensión de n etapas en cascada para frecuencias altas, la cual será igual a $|A_{v_{mT}}|/\sqrt{2}$ a la frecuencia de corte superior total $f_2^{(n)}$.

Igualando los denominadores y despejando obtenemos la ec. (15). Siguiendo un razonamiento análogo, llegamos a una expresión similar para la frecuencia de corte inferior total $f_1^{(n)}$, ec. (16)

$$f_2^{(n)} = f_2 \cdot \sqrt{2^{1/n} - 1} \quad (15)$$

$$f_1^{(n)} = \frac{f_1}{\sqrt{2^{1/n} - 1}} \quad (16)$$

Vemos que varias etapas en cascada tienen una f_1 más alta y una f_2 más baja que una sola etapa, reduciéndose por lo tanto el ancho de banda. También se verá afectada la pendiente de atenuación de las frecuencias altas y bajas.

Si se dibuja el diagrama de Bode de una sola etapa sobre papel logarítmico, para las frecuencias altas y bajas el gráfico se aproxima a una línea con pendiente 6 dB/octava. La pendiente para n etapas será $n \cdot 6$ dB/octava, lo cual se puede demostrar de la siguiente manera:

Para las frecuencias altas, la amplificación de tensión total en dB es:

$$A_{v_{TdB}} = 20 \log \frac{|A_{v_{mT}}|}{[\sqrt{1 + (f/f_2)^2}]^n} = 20 \log |A_{v_{mT}}| - 20n \cdot \log \sqrt{1 + (f/f_2)^2}$$

Si partiendo de $f = f_2$ aumentamos la frecuencia por octavas, o sea que la duplicamos, dichas frecuencias serán $f = f_2 \cdot 2^p$ con $p \in \mathbb{N}$. Para esas frecuencias, sustituyendo f en la ecuación anterior tenemos que:

$$A_{v_{TdB}} = 20 \log |A_{v_{mT}}| - 20n \cdot \log \sqrt{1 + (2^p)^2}$$

Si damos valores a p a partir de 1, veremos que el factor $20 \cdot \log \sqrt{1 + (2^p)^2}$ se incrementa en aproximadamente 6 cada vez. Como consecuencia, $A_{v_{TdB}}$ disminuye en $n \cdot 6$ dB/octava, donde n es el número de etapas amplificadoras en cascada consideradas.

Es posible hacer una demostración análoga para las frecuencias bajas.

8.4.3 Espectro de Fourier

Cualquier forma de onda periódica puede descomponerse en una serie de senos y cosenos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esto lo vemos expresado en la ec. (17), siendo a_0 la componente de continua, el término para $n = 1$ es la frecuencia fundamental y los demás términos son los

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (17)$$

llamados *armónicos*.

En general, una señal cuyas componentes de Fourier de amplitud apreciable estén dentro del ancho de banda del amplificador, pasará a través del mismo sin excesiva distorsión.

8.4.4 Ensayo con ondas cuadradas

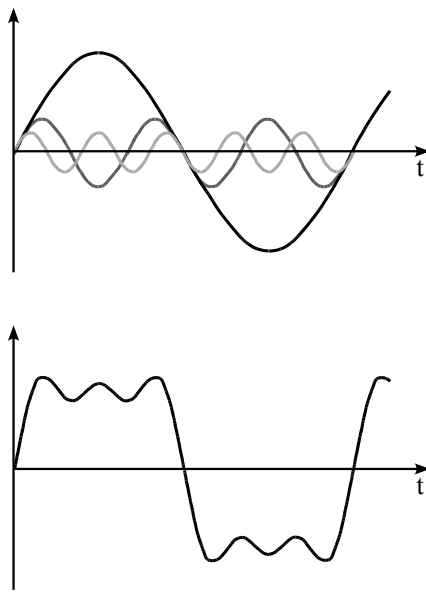


fig. 11

Una onda cuadrada perfecta consiste en una serie infinita de ondas sinusoidales que comprende a la componente fundamental de frecuencia ω_0 y sus armónicas impares, estando la amplitud de cualquier armónica particular en relación *inversa* a su orden. Esto se expresa analíticamente mediante la ec. (18).

$$f_{sq}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_0 t] \quad (18)$$

En la ec. (19) tenemos el desarrollo de los primeros 3 términos de la serie y en la fig. 11 vemos su representación gráfica y la suma de los mismos.

$$f_{sq}(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right] \quad (19)$$

Es de hacer notar la simetría que presenta cada semiciclo a izquierda y derecha de su eje vertical central para todas las armónicas. Las mismas están en fase, comenzando y terminando el semiciclo con amplitud cero, contribuyendo así a la formación por igual de ambas esquinas de la onda resultante.

Cuando aplicamos una onda cuadrada bien formada a la entrada de un amplificador, estamos en efecto aplicando un gran número de ondas senoidales. Las mismas deben pasar a través del amplificador con la misma relación de fase y amplitud relativa para que la señal de salida sea también una onda cuadrada bien formada.

El tiempo que tarda la onda cuadrada en pasar del 10% al 90% de su amplitud se llama tiempo de subida (*rise time*). Este cambio abrupto de un nivel a otro es debido a los armónicos de mayor orden, por lo que el *rise time* será menor cuanto mejor sea la respuesta en alta frecuencia del amplificador. Una reducción en la amplitud de los componentes de alta frecuencia aparecerá como un redondeo de las esquinas de la onda cuadrada.

La porción plana horizontal de la onda cuadrada depende de los armónicos de menor orden, 3°, 5°, etc. Si por ejemplo se reduce la amplitud de la fundamental, esto aparecerá como una curvatura de la parte horizontal.

En la práctica, la reducción de amplitud de una componente es causada habitualmente por alguna red que incluye componentes reactivos, por lo que irá asociada a una distorsión de fase que se manifestará como una asimetría del semiciclo.

Para ensayar un amplificador, usualmente bastará con observar su comportamiento a dos frecuencias, una de ellas algo por encima de su frecuencia de corte inferior y otra unas 20 o 30 veces menor que su frecuencia de corte superior. Por ej. una señal de 100 Hz o menos revelará el comportamiento desde unos 10 Hz o menos hasta 4 kHz, en tanto que una señal de 1 kHz revelará el comportamiento hasta más allá de los 10 kHz.

En la fig. 12 se pueden ver ejemplos de algunas distorsiones típicas que aparecen al ensayar amplificadores mediante ondas cuadradas.

Bibliografía

Millman y Halkias, Dispositivos y Circuitos Electrónicos

Precision Apparatus Co, Model E-310 Sine and Square Wave Generator Operating Instructions

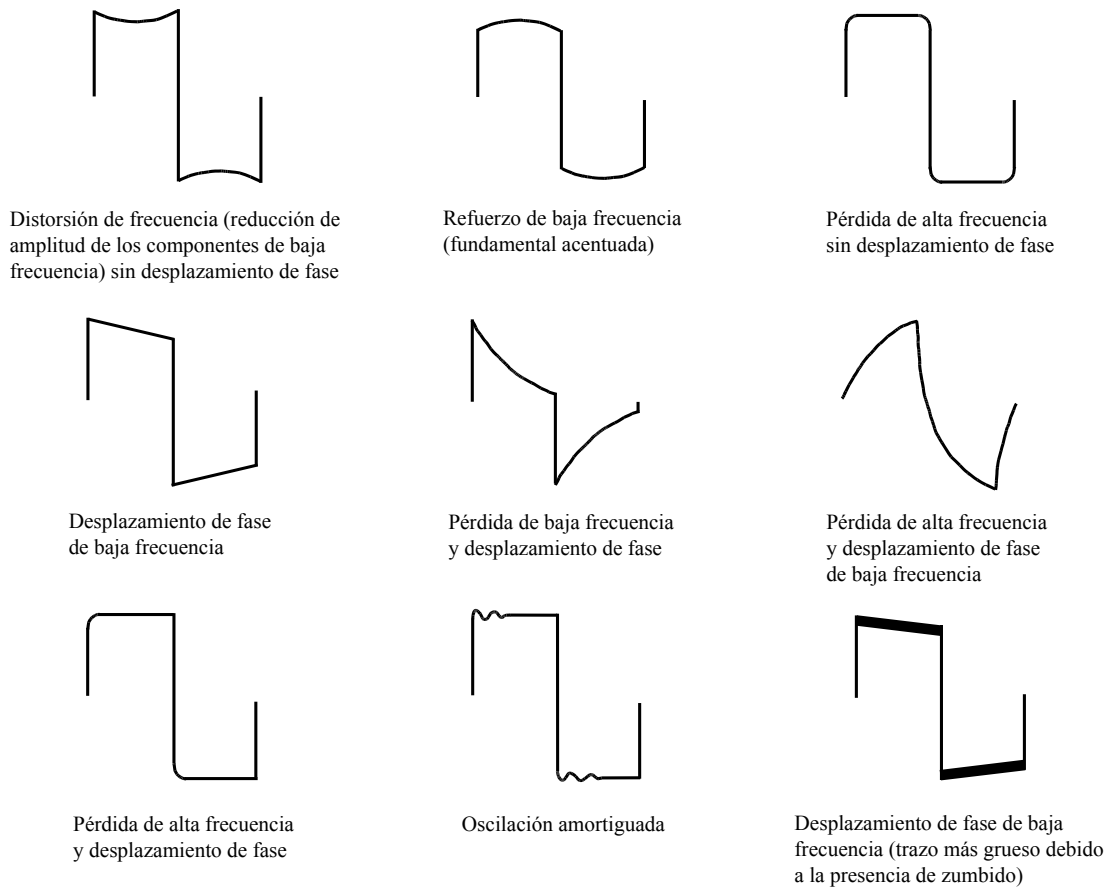


fig. 12

Problemas

En el amplificador de la figura, calcular los condensadores de acoplamiento C_{c1} , C_{c2} y C_{c3} de modo de obtener una frecuencia de corte total $f_1 = 20$ Hz.

