

## 5. Teoremas de red

Ing. Pedro Castro, Ing. Fernando Ubiría

### 5.1 Sistemas lineales

Un *sistema* es una combinación de elementos que actúan en conjunto para lograr un objetivo dado.

Para abordar la resolución de problemas en forma sistémica, es fundamental el concepto de *caja negra*. Cada elemento del sistema se sustituye por una caja negra y el análisis consiste en determinar como las interrelaciones entre los elementos influyen en el comportamiento del sistema global. La caja negra permite usar una descripción menos detallada de cada elemento.

El comportamiento de un elemento se especifica mediante una *relación de transformación entrada/salida*. Una *señal de entrada* es una *causa*, una *señal de salida* es un *efecto* provocado por la señal de entrada. Por lo tanto, la relación entrada/salida expresa el *comportamiento causa/efecto* del elemento.

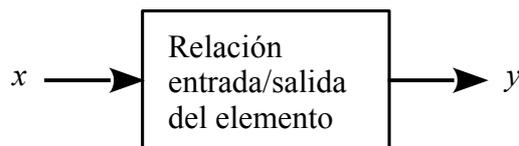


fig. 1

Sí  $y_1$  e  $y_2$  son las respuestas de un sistema cuando  $x_1$  y  $x_2$  son las respectivas entradas, el sistema es lineal si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{Aditividad: } T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

$$\text{Escalado: } T(a \cdot x_1) = a \cdot y_1, \text{ donde } a \text{ es una constante arbitraria}$$

Ambas propiedades se combinan en la propiedad de *superposición*:

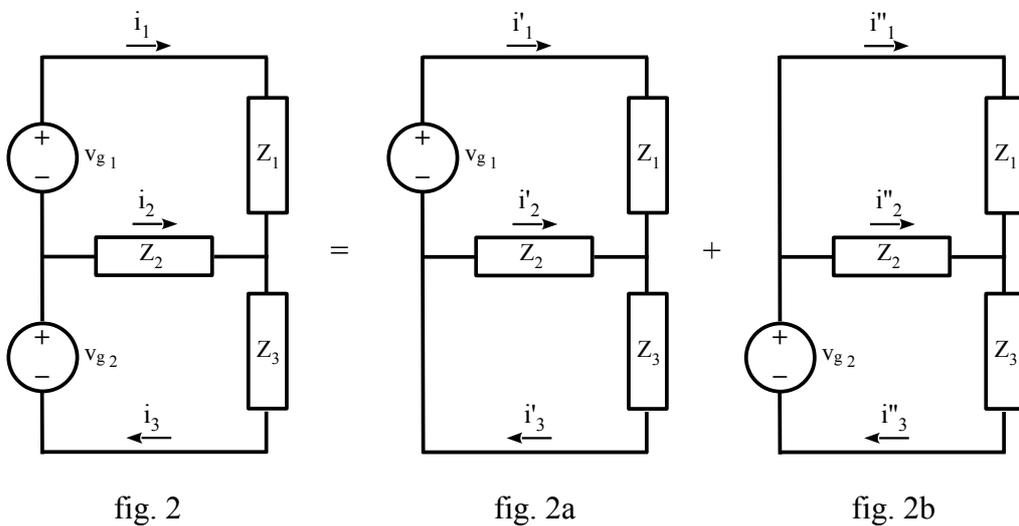
$$T(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) = a \cdot y_1 + b \cdot y_2, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes arbitrarias}$$

Un sistema lineal es aquel que posee la propiedad de la *superposición*. Si la señal de entrada es una combinación lineal de varias señales, entonces la señal de salida es *la misma* combinación lineal de las salidas correspondientes a cada una de las entradas individuales.

**5.2 Teorema de superposición**

Este principio establece que: *En toda red compuesta de impedancias lineales, la corriente que pasa por un punto es igual a la suma de todas las corrientes que pasarían por el mismo punto si cada generador fuera considerado independientemente, reemplazando al mismo tiempo todos los demás generadores por sus respectivas impedancias internas.*

Veamos primero en un circuito sencillo que es lo que nos dice este teorema: El circuito de la fig. 2 puede ser analizado como la “suma” (superposición) de los circuitos de las fig. 2a y 2b, en los que se ha reemplazado uno de los generadores de tensión por su impedancia interna, que en este caso es  $0 \Omega$  por ser los mismos ideales.



Las corrientes  $i_n$  del circuito de la fig. 2 son el resultado de las sumas algebraicas de las corrientes parciales de los circuitos de las figs. 2a y 2b:

$$\begin{cases} i_1 = i'_1 + i''_1 \\ i_2 = i'_2 + i''_2 \\ i_3 = i'_3 + i''_3 \end{cases} \quad (1)$$

Este teorema puede demostrarse en forma general como sigue: Si tenemos un circuito con  $n$  mallas independientes, sabemos que podemos resolverlo mediante un sistema de  $n$  ecuaciones de malla, que tendrán la forma:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot Z_{11} + i_2 \cdot Z_{12} + \dots + i_n \cdot Z_{1n} &= v_1 \\ i_1 \cdot Z_{21} + i_2 \cdot Z_{22} + \dots + i_n \cdot Z_{2n} &= v_2 \\ \vdots & \\ i_1 \cdot Z_{n1} + i_2 \cdot Z_{n2} + \dots + i_n \cdot Z_{nn} &= v_n \end{aligned}$$

Adonde  $Z_{pp}$  es la impedancia de la malla  $p$ ,  $Z_{pq} = Z_{qp}$  es la impedancia mutua de las mallas  $p$  y  $q$  y  $v_p$  es la suma algebraica de todos los generadores de tensión de la malla  $p$ .

Para calcular una cualquiera de estas corrientes de malla  $i_m$ , deberemos resolver el sistema de ecuaciones. Uno de los métodos que podemos utilizar es la regla de Cramer<sup>1</sup>, o sea mediante el cociente de determinantes:

$$i_m = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & v_1 & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & v_2 & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & v_n & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nm} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}}$$

Sabemos que, en el caso general, podemos desarrollar el determinante de una matriz  $A$   $\det A$  por las menores correspondientes a una fila o columna<sup>2</sup>:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{jk} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \cdot \text{cof } a_{jk} \quad \text{adónde } A_{jk} \text{ es la menor } j,k \text{ de } A$$

Si desarrollamos entonces el numerador por los menores correspondientes a la columna  $m$ , adónde se encuentran las tensiones  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y llamando  $D$  al determinante del denominador tendremos<sup>3</sup>:

$$i_m = \frac{1}{D} \cdot \sum_{j=1}^n v_j \cdot \text{cof } a_{jm} = \frac{v_1 \cdot C_{1m}}{D} + \frac{v_2 \cdot C_{2m}}{D} + \dots + \frac{v_n \cdot C_{nm}}{D}$$

Cada término de la sumatoria expresa la contribución de cada tensión individual a la corriente total  $i_m$  y demuestra que dicha contribución es independiente de las demás tensiones.

<sup>1</sup> Gabriel Cramer (1704-1752) Matemático suizo

<sup>2</sup> Tom Apostol, Calculus, Vol. 2, Cap. 3

<sup>3</sup> Everitt y Anner, Ingeniería de Comunicaciones, Cap. 3

Este teorema permite la solución de las redes sin necesidad de plantear un gran número de ecuaciones simultáneas, ya que sólo se considera un generador por vez. Asimismo, si se introducen nuevos generadores en el sistema, no es necesario comenzar de nuevo desde el principio. Si las tensiones introducidas son de diferentes frecuencias, el teorema nos permite obtener una solución para cada frecuencia individual y cada solución es independiente de las demás. Siempre que las impedancias de la red sean lineales, las corrientes de una frecuencia circulan por la red como si las demás frecuencias se hallaran ausentes.

### Ejemplo numérico

Resolveremos mediante el teorema de superposición el circuito de la fig. 3:

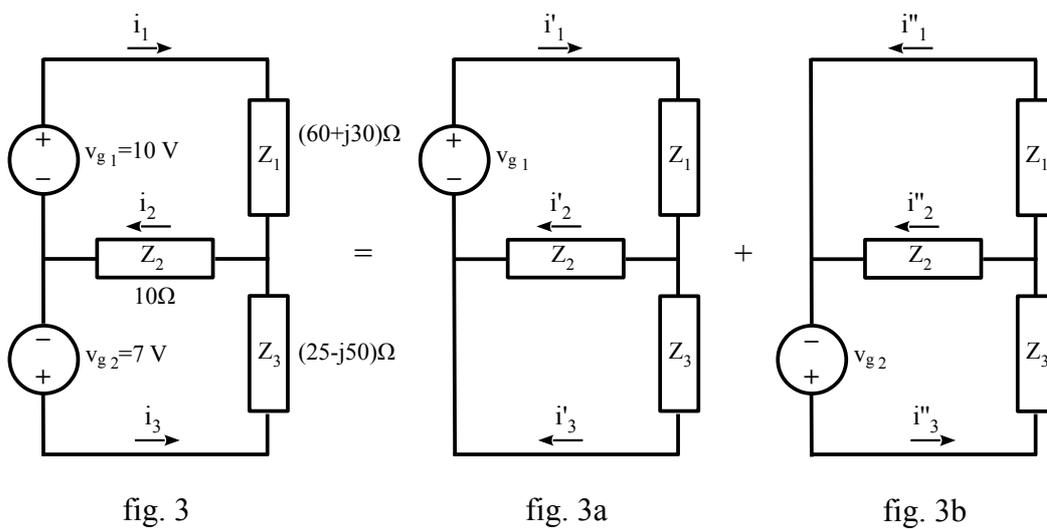


fig. 3

fig. 3a

fig. 3b

Primeramente sustituimos el generador  $v_{g2}$  por su impedancia interna (fig.3a) y calculamos:

$$i'_1 = \frac{v_{g1}}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{10 \text{ V}}{(60 + j30) \Omega + \frac{10(25 - j50)}{10 + (25 - j50)} \Omega} = (0,124 - j0,051) \text{ A}$$

$$i'_2 = i'_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(0,124 - j0,051) \text{ A} \cdot (25 - j50)}{10 + (25 - j50)} = (0,1055 - j0,0628) \text{ A}$$

$$i'_3 = i'_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{(0,124 - j0,051) \text{ A} \cdot 10}{10 + (25 - j50)} = (0,0185 + j0,0118) \text{ A}$$

A continuación, sustituimos el generador  $v_{g_1}$  por su impedancia interna (fig.3b) y calculamos:

$$i''_3 = \frac{v_{g_2}}{Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{7 \text{ V}}{(25 - j50)\Omega + \frac{10(60 + j30)}{10 + (60 + j30)}\Omega} = (0,0659 + j0,0965) \text{ A}$$

$$i''_2 = i''_3 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{(0,0659 + j0,0965) \text{ A} \cdot (60 + j30)}{10 + (60 + j30)} = (0,053 + j0,0883) \text{ A}$$

$$i''_1 = i''_3 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(0,0659 + j0,0965) \text{ A} \cdot 10}{10 + (60 + j30)} = (0,0129 + j0,0082) \text{ A}$$

Finalmente sumaremos las corrientes parciales, préstese atención a los sentidos de las mismas:

$$i_1 = i'_1 - i''_1 = (0,124 - j0,051) - (0,0129 + j0,0082) = (0,111 - j0,0592) \text{ A}$$

$$i_2 = i'_2 + i''_2 = (0,1055 - j0,0628) + (0,053 + j0,0883) = (0,1585 + j0,0255) \text{ A}$$

$$i_3 = i''_3 - i'_3 = (0,0659 + j0,0965) - (0,0185 + j0,0118) = (0,0474 + j0,0847) \text{ A}$$

### 5.3 Redes pasivas equivalentes

*Una red equivalente es una red que, en ciertas condiciones de uso, puede reemplazar a otra red sin efecto sustancial sobre el comportamiento eléctrico.*

Esto significa que dos redes lineales y pasivas pueden decirse *equivalentes* sí, cuando se aplican tensiones idénticas (de cualquier valor) a terminales correspondientes de las dos redes, aparecen corrientes idénticas en terminales correspondientes de las dos redes.

#### 5.3.1 Redes pasivas equivalentes de dos terminales

Se desea construir una red que tenga la misma impedancia  $Z_{in}$  que la red original. Para sintetizar  $Z_{in}$  a una sola frecuencia, debemos satisfacer dos condiciones: el módulo  $|Z_{in}|$  y el argumento  $\theta_{in}$ . La impedancia deseada tendrá por lo menos una resistencia y una reactancia, pudiendo dichos componentes conectarse tanto en serie como en paralelo. En general, como las componentes reactivas varían con la frecuencia, la equivalencia es válida para una sola

frecuencia. La síntesis de una impedancia compleja sobre una gama extensa de frecuencias es complicada y requiere en general más de dos elementos.

### 5.3.2 Redes pasivas equivalentes de tres terminales

Una configuración común es una red con dos pares de terminales, en los que un terminal de cada par se hace común por medio de una conexión directa. Queremos diseñar una red de tres terminales que sea equivalente a la original (fig. 4a), con el mínimo número de elementos que sea posible. Si tratamos de interconectar los tres terminales con elementos de impedancia, sólo podemos usar 3 elementos sin poner 2 o más de ellos en serie o paralelo. Dichos tres elementos pueden disponerse como una **T** (b) o una  **$\pi$**  (c).

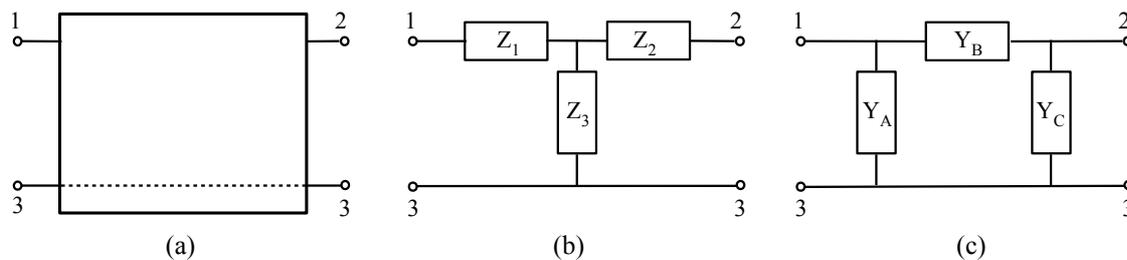


fig. 4

Para determinar las tres constantes de la sección equivalente, necesitamos al menos 3 mediciones independientes, pues existen 3 incógnitas. Las impedancias de más fácil medición son las impedancias de excitación (entrada) en circuito abierto y en cortocircuito en cada par de terminales.

$Z_{o1}$  - Impedancia medida en los terminales de entrada 1-3 con los terminales de salida 2-3 en circuito abierto

$Z_{o2}$  - Impedancia medida en los terminales de salida 2-3 con los terminales de entrada 1-3 en circuito abierto

$Z_{s1}$  - Impedancia medida en los terminales de entrada 1-3 con los terminales de salida 2-3 en cortocircuito

$Z_{s2}$  - Impedancia medida en los terminales de salida 2-3 con los terminales de entrada 1-3 en cortocircuito

**Cálculo de la sección T equivalente**

Para la sección **T** de la fig. 4b, escribimos las ecuaciones de las impedancias  $Z_{o1}$ ,  $Z_{o2}$  y  $Z_{s1}$ :

$$Z_{o1} = Z_1 + Z_3 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = Z_{o1} - Z_3 \quad (2)$$

$$Z_{o2} = Z_2 + Z_3 \quad \Rightarrow \quad Z_2 = Z_{o2} - Z_3 \quad (3)$$

$$Z_{s1} = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (4)$$

Sustituimos entonces las ec. (2) y (3) en (4) y obtenemos:

$$Z_{s1} = \frac{Z_{o1} \cdot Z_{o2} - Z_{o1} \cdot Z_3 - Z_{o2} \cdot Z_3 + Z_3^2 + Z_{o1} \cdot Z_3 - Z_3^2 + Z_{o2} \cdot Z_3 - Z_3^2}{Z_{o2}} \quad (5)$$

Cancelando los términos opuestos y despejando  $Z_3$  obtenemos la ec. (6) y substituyendo ésta en las ec. (2) y (3) obtenemos las (7) y (8), lo cual completa el cálculo de la sección **T** equivalente.

$$Z_3 = \pm \sqrt{Z_{o2}(Z_{o1} - Z_{s1})} \quad (6)$$

$$Z_1 = Z_{o1} \mp \sqrt{Z_{o2}(Z_{o1} - Z_{s1})} \quad (7)$$

$$Z_2 = Z_{o2} \mp \sqrt{Z_{o2}(Z_{o1} - Z_{s1})} \quad (8)$$

En las ecuaciones anteriores hay una ambigüedad respecto al signo de  $Z_3$ , lo cual dará lugar a dos secciones diferentes, siendo sólo una de ellas *equivalente* a la red original. Para poder resolver esta ambigüedad necesitaremos algún dato adicional, como por ej. la relación de fase entre las corrientes de entrada y salida.

Por supuesto, la sección **T** será realizable físicamente sólo en el caso en que en ninguna de las ramas aparezca una componente resistiva negativa.

Consideremos ahora la impedancia  $Z_{s2}$  y los productos  $Z_{o1} \cdot Z_{s2}$  y  $Z_{o2} \cdot Z_{s1}$ :

$$Z_{s2} = Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

$$Z_{o1} \cdot Z_{s2} = (Z_1 + Z_3) \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3$$

$$Z_{o2} \cdot Z_{s1} = (Z_2 + Z_3) \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3$$

$\Rightarrow Z_{o1} \cdot Z_{s2} = Z_{o2} \cdot Z_{s1}$  Esto nos demuestra que si medimos tres de las impedancias, se puede calcular el valor de la cuarta, o sea que sólo tres de las cuatro impedancias  $Z_{o1}$ ,  $Z_{o2}$ ,  $Z_{s1}$  y  $Z_{s2}$  son independientes.

**Cálculo de la sección  $\pi$  equivalente**

La sección  $\pi$  equivalente puede ser calculada por un procedimiento similar, por tratarse de una red  $\pi$  es preferible trabajar con admitancias. Partiendo de la fig. 4c podemos escribir:

$$Y_{o1} = Y_A + \frac{Y_B \cdot Y_C}{Y_B + Y_C} \quad (9)$$

$$Y_{s1} = Y_A + Y_B \quad (10)$$

$$Y_{s2} = Y_C + Y_B \quad (11)$$

Se deja como ejercicio para el estudiante, partiendo de las ec. (9), (10) y (11), demostrar que las ecuaciones de diseño de la sección  $\pi$  equivalente son:

$$Y_A = Y_{s1} - Y_B \quad (12)$$

$$Y_C = Y_{s2} - Y_B \quad (13)$$

$$Y_B = \pm \sqrt{Y_{s2}(Y_{s1} - Y_{o1})} \quad (14)$$

**Equivalencia entre las redes  $T$  y  $\pi$**

Dada una red  $T$ , es posible diseñar una sección equivalente  $\pi$  y viceversa. Las ecuaciones que relacionan los elementos de impedancia de una red  $T$  con los elementos de una red  $\pi$  equivalente se conocen como "transformaciones  $T - \pi$ ".

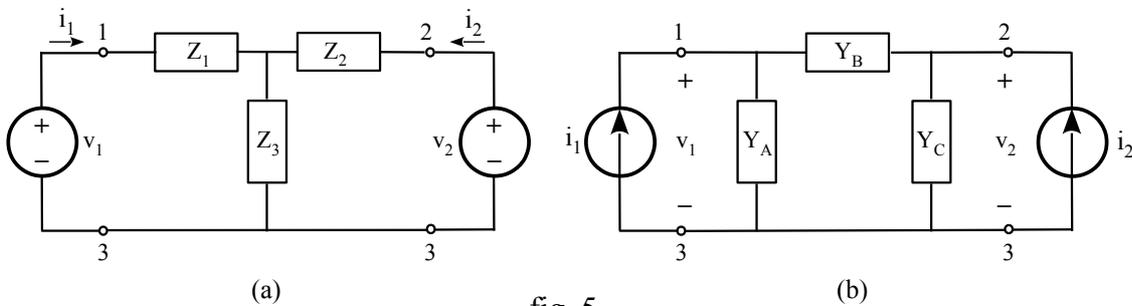


fig. 5

Apliquemos de la manera indicada las tensiones  $v_1$  y  $v_2$  a ambas redes de la fig.5. Las ecuaciones para la red  $\pi$  son:

$$\begin{cases} i_1 = (Y_A + Y_B)v_1 - Y_B \cdot v_2 \\ i_2 = -Y_B \cdot v_1 + (Y_B + Y_C)v_2 \end{cases}$$

Por la regla de Cramer:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} i_1 & -Y_B \\ i_2 & Y_B + Y_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B & -Y_B \\ -Y_B & Y_B + Y_C \end{vmatrix}} = \frac{Y_B + Y_C}{Y_T^2} i_1 + \frac{Y_B}{Y_T^2} i_2 \quad (15)$$

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B & i_1 \\ -Y_B & i_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B & -Y_B \\ -Y_B & Y_B + Y_C \end{vmatrix}} = \frac{Y_B}{Y_T^2} i_1 + \frac{Y_A + Y_B}{Y_T^2} i_2 \quad (16)$$

$$\text{donde: } Y_T^2 = Y_A \cdot Y_B + Y_B \cdot Y_C + Y_A \cdot Y_C$$

Las ecuaciones de malla para la red **T** son:

$$\begin{cases} v_1 = (Z_1 + Z_3)i_1 + Z_3 i_2 & (17) \\ v_2 = Z_3 i_1 + (Z_2 + Z_3)i_2 & (18) \end{cases}$$

Por definición, si las dos redes son equivalentes, las tensiones y corrientes correspondientes son iguales y por lo tanto los coeficientes de los términos correspondiente de las ec. (15) y (17) y de las ec. (16) y (18) han de ser iguales.

Igualando entonces los coeficientes y despejando las  $Z$  se obtienen las **transformaciones  $\pi - T$** :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Y_C}{Y_T^2} & Z_1 &= \frac{Z_A \cdot Z_B}{Z_T} \\ Z_2 &= \frac{Y_A}{Y_T^2} & Z_2 &= \frac{Z_B \cdot Z_C}{Z_T} \\ Z_3 &= \frac{Y_B}{Y_T^2} & Z_3 &= \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_T} \end{aligned} \quad (19)$$

dónde:  $Y_T^2 = Y_A \cdot Y_B + Y_B \cdot Y_C + Y_A \cdot Y_C$

$$Z_T = Z_A + Z_B + Z_C$$

Resolviendo por la regla de Cramer el sistema de las ecuaciones de malla (17)-(18) y siguiendo un razonamiento análogo, es posible obtener las **transformaciones  $T - \pi$** :

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{Z_2}{Z_T^2} \\ Y_B &= \frac{Z_3}{Z_T^2} \\ Y_C &= \frac{Z_1}{Z_T^2} \end{aligned} \quad (20)$$

dónde:  $Z_T^2 = Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3$

### 5.3.3 Redes equivalentes de cuatro terminales

Una red de cuatro terminales, o de dos pares de terminales, puede carecer de la conexión común propia de las redes de tres terminales, pero no puede distinguirse de esta última en lo que respecta a las equivalencias, *siempre que no exista conexión adicional entre los generadores de entrada y salida por medio de un tercer conductor, tal como el de masa*. Esto es consecuencia del hecho de que las mediciones de las impedancias  $Z_{o1}$ ,  $Z_{o2}$ ,  $Z_{s1}$  y  $Z_{s2}$  se hacen sólo en uno u otro

extremo de la red. Para determinar si existe o no una conexión común *dentro* de la red, es necesaria una medición adicional de extremo a extremo. Puede concluirse entonces que es posible diseñar una red **T** o **π** que sea equivalente a una red de dos pares de terminales.

Ciertos tipos de red empleados en las comunicaciones se hacen intencionalmente equilibradas respecto a tierra. Esto significa que los dos lados de la red tienen iguales admitancias en paralelo respecto a tierra e iguales impedancias en serie.

Para obtener un equivalente *equilibrado* para la red de cuatro terminales, sólo es necesario repartir la impedancia por partes iguales entre la rama serie superior y la inferior.

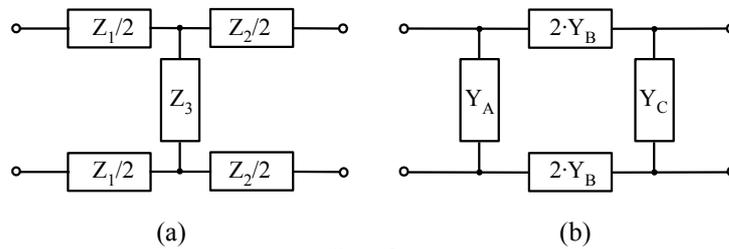


fig. 6

5.3.4 Otras propiedades de las redes T y π

Redes T y π asimétricas

Consideraremos en primer término la impedancia *iterativa*:

"La impedancia iterativa de un transductor es la impedancia que, conectada a un par de terminales, produce una impedancia igual en el otro par de terminales."

Aplicando esta definición a la sección **T** asimétrica, en la que  $Z_1 \neq Z_2$ , de la fig. 7, si  $Z_R = Z_{it}$  entonces por definición  $Z_{in} = Z_{it}$ .

Se puede calcular  $Z_{it}$  a partir de los componentes conocidos de la red:

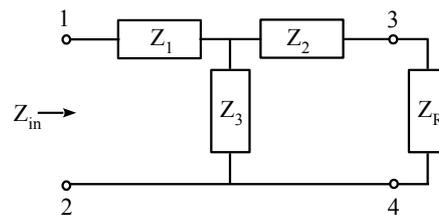


fig. 7

$$Z_{in} = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_{it})}{Z_2 + Z_3 + Z_{it}} = Z_{it} \Rightarrow Z_{it} = \frac{Z_1 - Z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{4} + (Z_1 + Z_2)Z_3} \quad (21)$$

Obsérvese que la ec. (21) sólo es válida cuando  $Z_1$  está del lado de la *entrada* de la sección T. Si se invierte la sección T poniendo  $Z_1$  del otro lado, el nuevo valor de  $Z_{it}$  no coincide con la ec. (21).

Procediendo de la misma manera, se puede hallar la admitancia iterativa de una red  $\pi$  asimétrica:

$$Y_{it} = \frac{Y_A - Y_C}{2} \pm \sqrt{\frac{(Y_A + Y_C)^2}{4} + (Y_A + Y_C)Y_B} \quad (22)$$

Las redes asimétricas de cuatro terminales se caracterizan además por otro par de impedancias, las impedancias *imágenes*:

"Las impedancias imágenes de un transductor son las impedancias que cargan simultáneamente todas sus entradas y salidas de tal modo que en cada una de sus entradas y salidas son iguales las impedancias vistas en los dos sentidos."

Para las estructuras de tres y cuatro terminales, tales como las redes **T** y  **$\pi$** , las dos impedancias imágenes  $Z_{11}$  y  $Z_{12}$  son dos valores de impedancia tales que, si el extremo 1 de la red se carga con  $Z_{11}$ , la impe-

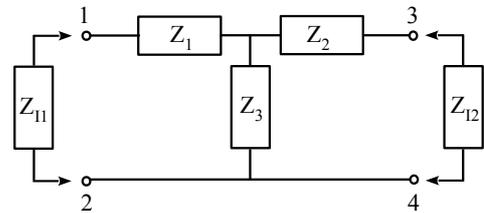


fig. 8

dancia de entrada en el extremo 2 resultará ser  $Z_{12}$ ; mientras que si el extremo 2 de la red se carga con  $Z_{12}$ , la impedancia de entrada en el extremo 1 será ser  $Z_{11}$ .

Aplicando esta definición a la sección **T** de la fig. 8, la impedancia de entrada en los terminales 1, 2 cuando se conecta  $Z_{12}$  entre los terminales 3, 4 es por definición  $Z_{11}$  y cuando se conecta  $Z_{11}$  entre los terminales 1, 2, la impedancia de entrada en los terminales 3, 4 es  $Z_{12}$ :

$$Z_{11} = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_{12})}{Z_2 + Z_3 + Z_{12}}$$

$$Z_{12} = Z_2 + \frac{Z_3(Z_1 + Z_{11})}{Z_1 + Z_3 + Z_{11}}$$

Resolviendo ese par de ecuaciones simultáneas, se obtienen las ec. (23).

$$\Rightarrow Z_{11} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 + Z_3} \cdot (Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)} \quad (23)$$

$$Z_{12} = \sqrt{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_3} \cdot (Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3)}$$

Las expresiones bajo el radical son el producto de las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto de la red T, ver las ec. (2), (3) y (4), por lo que otras expresiones para las impedancias imágenes son:

$$Z_{11} = \sqrt{Z_{o1} \cdot Z_{s1}} \quad (24)$$

$$Z_{12} = \sqrt{Z_{o2} \cdot Z_{s2}}$$

Se pueden derivar expresiones similares para las admitancias imágenes de las redes  **$\pi$**  asimétricas.

**Redes T y π simétricas**

Una red **T** simétrica es aquella en la cual  $Z_1 = Z_2$ .

Bajo esas condiciones, la ec. (21) toma la forma:  $Z_{it} = \sqrt{Z_1^2 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_3}$  (25)

Las ec. (23) toman también ahora la forma:  $Z_{11} = Z_{12} = \sqrt{Z_1^2 + 2 \cdot Z_1 \cdot Z_3}$  (26)

De las ec. (25) y (26) se desprende que en las redes **T** simétricas, las impedancias iterativas e imágenes se confunden en una única impedancia, la cual recibe el nombre de *impedancia característica* de la red,  $Z_q$ . Esto mismo sucede en las redes **π** simétricas, en las cuales  $Y_A = Y_C$ .

**Atenuadores y redes resistivas adaptadoras**

Un *atenuador* es un dispositivo que reduce la potencia de una señal sin deformar apreciablemente la forma de onda. Cuando es necesario introducir una atenuación determinada, se usan generalmente redes **T** y **π** resistivas, las cuales según el caso serán simétricas o asimétricas y serán balanceadas o no.

Cuando se desea adaptar dos impedancias diferentes introduciendo un mínimo de atenuación, se usan redes **L** resistivas.

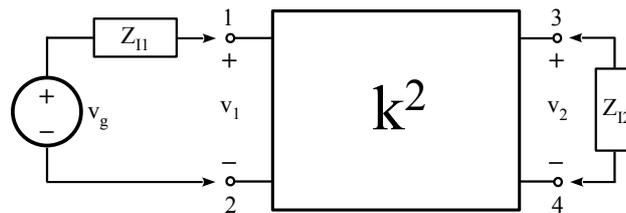


fig. 9

$$k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{v_1^2 / Z_{11}}{v_2^2 / Z_{12}}$$

Analizaremos como ejemplo el caso particular<sup>1</sup> de un atenuador en **π** que va a ser insertado entre un generador y una carga cuyo valor es igual a la impedancia interna del generador. La red **π** a usar será simétrica para que  $Z_{11} = Z_{12} = Z_q$ , de donde resulta que:

$$Z_A = Z_C = Z_X$$

$$k = \frac{v_1}{v_2}$$

Aplicando la fórmula del divisor de tensión, la tensión entre los terminales de salida 3 y 4 será:

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot Z_X // Z_q}{Z_B + Z_X // Z_q}$$

Trasponiendo términos y operando, obtenemos la relación k entre  $v_1$  y  $v_2$ :

$$k = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_B \cdot Z_X + Z_B \cdot Z_q + Z_X \cdot Z_q}{Z_X \cdot Z_q} \quad (27)$$

<sup>1</sup> Para otros casos más generales y para atenuadores en T o en L, consulte la información en:

P. K. McElroy, *Designing Resistive Attenuating Networks*, Proceedings of the IRE - March 1935

Aplicando la definición de impedancia característica a la red, obtenemos:

$$Z_q = \frac{Z_X (Z_B + Z_X // Z_q)}{Z_X + Z_B + Z_X // Z_q} = \frac{Z_X (Z_B \cdot Z_X + Z_B \cdot Z_q + Z_X \cdot Z_q)}{Z_X^2 + Z_X \cdot Z_q + Z_B \cdot Z_X + Z_B \cdot Z_q + Z_X \cdot Z_q}$$

El término entre paréntesis en el numerador es igual a  $k \cdot Z_X \cdot Z_q$ , sustituyéndolo y operando

$$Z_X = Z_q \cdot \frac{k + 1}{k - 1} \quad (28)$$

obtenemos la ec. (28). Sustituyendo la ec. (28) en la ec. (27) y operando, obtenemos la ec. (29).

$$Z_B = \frac{Z_q}{2} \cdot \frac{k^2 - 1}{k} \quad (29)$$

En el laboratorio de electrónica, es común el uso de generadores de audiofrecuencias cuya impedancia interna  $R_g$  es  $600 \Omega$ .

Proyectaremos un atenuador en  $\pi$  para ser insertado entre el generador y una carga  $R_L = 600 \Omega$ , con un factor de atenuación de tensión  $k = 10$

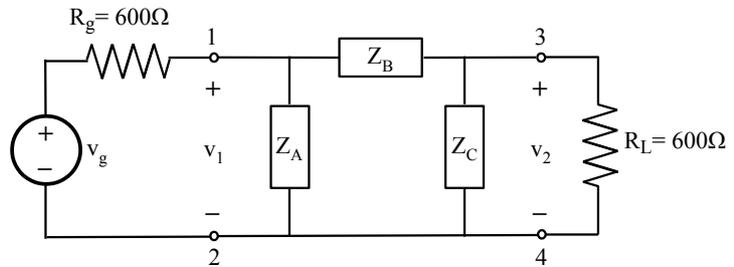


fig. 10

La red  $\pi$  a usar será simétrica y su  $Z_q = R_g = R_L = 600 \Omega$ , sustituyendo valores en las ecuaciones (28) y (29) obtenemos:

$$Z_A = Z_C = Z_X = 600 \Omega \cdot \frac{10 + 1}{10 - 1} = 733 \Omega \quad Z_B = \frac{600 \Omega}{2} \cdot \frac{10^2 - 1}{10} = 2970 \Omega$$

### 5.4 Redes activas equivalentes

Las mismas ideas básicas aplicadas hasta ahora al caso de las redes pasivas son aplicables al caso de las redes que contienen fuentes de tensión o corriente, pero en tales casos necesitamos una nueva definición de equivalencia: *Dícese que dos redes activas son equivalentes si producen la misma corriente en las cargas cuando éstas tienen el mismo valor arbitrario de impedancia.*

5.4.1 Teorema de Thévenin<sup>1</sup>

La corriente que circula por una impedancia cualquiera  $Z_L$  conectada a dos terminales de una red es la misma que si  $Z_L$  estuviera conectada a un generador simple, cuya tensión generada fuera igual a la tensión de circuito abierto entre los terminales en cuestión y cuya impedancia interna es igual a la impedancia que presenta la red entre esos mismos terminales cuando todos sus generadores se reemplazan por sus respectivas impedancias internas.

El teorema de Thévenin nos dice que podemos reemplazar el circuito complejo de la fig. 11a por el generador de la fig. 11b.  $v_{oc}$  es la tensión medida entre los terminales 1 y 2 con  $Z_L$  desconectada y  $Z_g$  es la impedancia entre esos mismos terminales medida hacia la red, habiendo reemplazado para la medición a todos los generadores por sus impedancias internas.

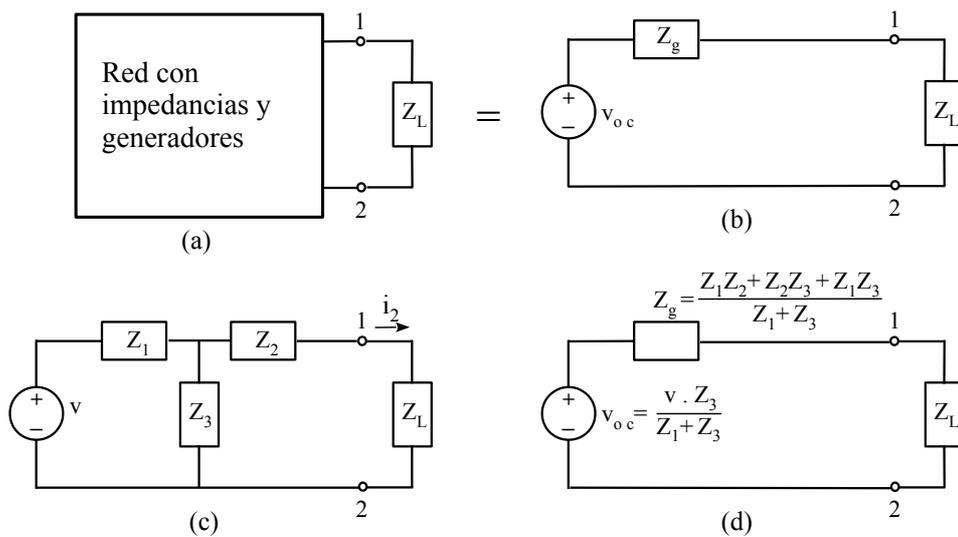


fig. 11

i) Para el primer paso en la demostración del teorema, supondremos que dentro de la red original hay un sólo generador. Entre ese generador y los terminales 1 y 2 habrá entonces una red de 3 o 4 terminales, la cual como ya hemos visto en 5.3 puede ser reducida a una sección **T** equivalente como la representada en la fig. 11c.

Calcularemos en el circuito de la fig. 11c la corriente  $i_2$  a través de la carga  $Z_L$

<sup>1</sup> Enunciado en 1883 por M.L.Thévenin, Ingeniero francés que trabajaba en telegrafía

mediante las leyes de Ohm y Kirchhoff.

La corriente  $i_{Z_1}$  que atraviesa  $Z_1$  es:

$$i_{Z_1} = \frac{v}{Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_L)}{Z_2 + Z_3 + Z_L}}$$

Aplicando la fórmula del divisor de

corrientes, la corriente  $i_2$  es:

$$i_2 = \frac{i_{Z_1} \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_L}$$

Sustituiremos entonces la 1er ec. en la

2da y operaremos sobre la misma:

$$i_2 = \frac{v \cdot Z_3}{\left[ Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_L)}{Z_2 + Z_3 + Z_L} \right] (Z_2 + Z_3 + Z_L)} = \frac{v \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3 + Z_L (Z_1 + Z_3)}$$

Dividiremos ahora numerador y denominador por  $(Z_1 + Z_3)$  para que  $Z_L$  aparezca aisladamente en el denominador:

$$i_2 = \frac{v \cdot Z_3 / (Z_1 + Z_3)}{\frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} + Z_L} \quad (30)$$

Vemos que el numerador tiene como dimensión "volts" y el denominador es la suma de dos impedancias. Esta corriente  $i_2$  es la misma que circula para cualquier valor de  $Z_L$  si ésta se conecta a un generador cuya tensión generada es  $v \cdot Z_3 / (Z_1 + Z_3)$  y cuya impedancia interna es  $(Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3) / (Z_1 + Z_3)$

Apliquemos ahora al circuito de la fig. 11c el teorema de Thévenin. Desconectando  $Z_L$ , la tensión entre los terminales 1 y 2 sería:

$$V_{oc} = \frac{v \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

y si se desconectara  $Z_L$  y se reemplazara el generador por un cortocircuito, la impedancia entre los terminales 1 y 2 sería:

$$Z_g = Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

Obtenemos entonces el circuito de la fig. 11d. En este circuito, la corriente a través de  $Z_L$  responde a la ec. (30) y por lo tanto es equivalente al circuito de la fig. 11c, quedando así demostrado el teorema para redes con un solo generador.

ii) Si en la red hay más de un generador, el teorema de superposición permite considerar separadamente cada uno de ellos para esta demostración. Una vez que todos ellos hayan sido reducidos al circuito simple de la fig. 11d, las tensiones generadas quedan conectadas todas en serie y pueden ser reemplazadas por un único generador, quedando así demostrado el teorema para cualquier número de generadores.

**Ejemplo numérico**

En el circuito de la fig. 12, calcular el generador de Thévenin equivalente y calcular entonces la corriente a través de la carga  $i_L$ . Los valores de las impedancias están en ohms.

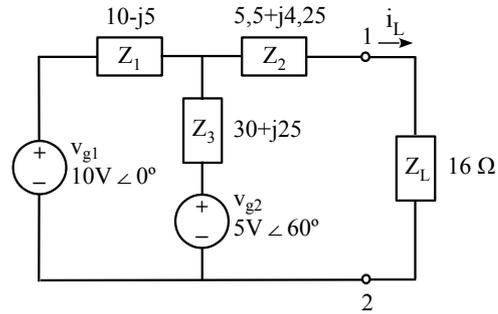


fig.12

Ante todo debemos tener en cuenta que los generadores están defasados entre sí, por lo tanto es necesario descomponer al 2do generador en la suma de dos fasores ortogonales. Intuitivamente, podemos considerar a dichos fasores como dos generadores separados, uno de ellos en fase con el generador de 10V y otro defasado  $90^\circ$ :

$$\Rightarrow 5\text{ V} \angle 60^\circ = (2,5 + j4,33)\text{ V}$$

La tensión medida entre los terminales 1 y 2 en circuito abierto será igual al producto de la corriente de malla por  $Z_3$  más el generador  $v_{g2}$ :

$$\begin{aligned} v_{oc} &= \frac{[v_{g1} - v_{g2}] \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} + v_{g2} = \frac{[10\text{ V} - (2,5 + j4,33)\text{ V}] \cdot (30 + j25)}{(10 - j5) + (30 + j25)} + (2,5 + j4,33)\text{ V} = \\ &= (9,74 + j2,15)\text{ V} = 9,97\text{ V} \angle 12,44^\circ \end{aligned}$$

La impedancia vista desde los terminales 1 y 2, sustituyendo ambos generadores por sus impedancias internas ( $0\ \Omega$  por tratarse de generadores ideales) será:

$$Z_g = Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = (5,5 + j4,25) + \frac{(10 - j5) \cdot (30 + j25)}{(10 - j5) + (30 + j25)} = 15 + j2\ \Omega$$

Siendo finalmente la corriente en la carga:

$$i_L = \frac{v_{oc}}{Z_g + Z_L} = \frac{9,97\text{ V} \angle 12,44^\circ}{(15 + j2) + 16\ \Omega} = \frac{9,97\text{ V} \angle 12,44^\circ}{31,06\ \Omega \angle 3,69^\circ} = 320\text{ mA} \angle 8,76^\circ$$

Como ejercicio, se recomienda al estudiante verificar el resultado resolviendo el circuito por ecuaciones de mallas o superposición.

### Determinación experimental del circuito equivalente de Thévenin

El teorema de Thévenin se puede aplicar sin dificultad cuando se conocen los elementos internos y la configuración de la red. En cambio, la determinación experimental del generador equivalente de una "caja negra" es más compleja. Debemos determinar  $|v_{oc}|$  y  $Z_g$ , pero en general no podemos medir la impedancia interna directamente con un instrumento. Si además estamos seguros de que la fuente se comporta como una red lineal, podemos efectuar mediciones de tensión para diferentes condiciones de carga. Como tenemos 3 incógnitas, necesitaremos 3 mediciones.

1)  $|v_{oc}|$  se obtiene directamente en vacío para  $Z_L = \infty$

$$2) \text{ Sea } Z_L = R_1 + jX_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{v_{oc} \cdot (R_1 + jX_1)}{(R_g + R_1) + j(X_g + X_1)}$$

tomando las magnitudes,

$$\text{elevando al cuadrado y reordenando} \quad \Rightarrow \quad (R_g + R_1)^2 + (X_g + X_1)^2 = \left| \frac{v_{oc}}{v_1} \right|^2 \cdot (R_1^2 + X_1^2) \quad (31)$$

3) Sea  $Z_L = R_2 + jX_2$  y procediendo de modo similar:

$$\Rightarrow \quad (R_g + R_2)^2 + (X_g + X_2)^2 = \left| \frac{v_{oc}}{v_2} \right|^2 \cdot (R_2^2 + X_2^2) \quad (32)$$

Restando las ec. (31) – (32) y desarrollando obtenemos la ec. (33)

$$2(R_1 - R_2)R_g + 2(X_1 - X_2)X_g = (R_1^2 + X_1^2) \left( \left| \frac{v_{oc}}{v_1} \right|^2 - 1 \right) - (R_2^2 + X_2^2) \left( \left| \frac{v_{oc}}{v_2} \right|^2 - 1 \right) \quad (33)$$

Eligiendo inteligentemente los valores de la carga, podemos simplificar la ecuación (33). Si se elige  $X_1 = X_2$ , podemos despejar  $R_g$  en función de cantidades conocidas. Al tratar luego de determinar  $X_g$  usando la ec. (31) o la (32), como ambas son cuadráticas habrá una ambigüedad en cuanto al signo de  $X_g$ .

Si, en cambio, elegimos  $R_1 = R_2$ , podemos despejar  $X_g$ :

$$X_g = \frac{(R_1^2 + X_1^2) \left( \left| \frac{v_{oc}}{v_1} \right|^2 - 1 \right) - (R_1^2 + X_2^2) \left( \left| \frac{v_{oc}}{v_2} \right|^2 - 1 \right)}{2(X_1 - X_2)} \quad (33a)$$

Se puede entonces calcular  $R_g$  a partir de la ec. (31) o la (32)

Podemos obtener expresiones más simples si medimos  $|v_1|$  y  $|v_2|$  con cargas capacitivas puras, o sea  $R_1 = R_2 = 0$

$$X_g = \frac{X_1^2(|v_{oc}/v_1|^2 - 1) - X_2^2(|v_{oc}/v_2|^2 - 1)}{2(X_1 - X_2)} \quad (34)$$

$$R_g^2 = \left| \frac{v_{oc}}{v_1} \right|^2 X_1^2 - (X_g + X_1)^2 \quad (35)$$

**5.4.2 Teorema de Norton<sup>1</sup>**

La corriente que circula por una impedancia  $Z_L$  conectada a dos terminales de una red es la misma que si  $Z_L$  estuviera conectada a un generador de corriente constante cuya corriente generada es igual a la corriente que circula por los terminales dichos cuando se los pone en cortocircuito y que está en paralelo con una impedancia igual a la que se presenta entre los terminales considerados mirando hacia la red y con todos los generadores de ésta reemplazados por sus respectivas impedancias internas.

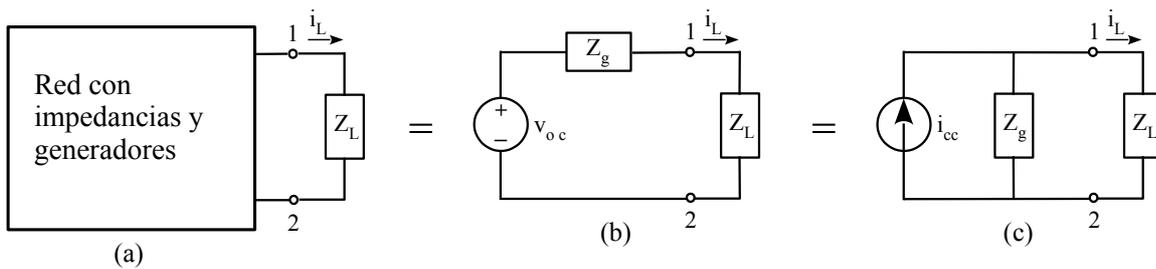


fig. 13

Este teorema es simplemente el dual del teorema de Thévenin.

Si aplicamos a la red (a) el teorema de Thévenin obtenemos el equivalente (b), siendo la corriente  $i_L$  :

$$i_L = \frac{v_{oc}}{Z_g + Z_L} \quad (36)$$

La corriente de cortocircuito  $I_{cc}$  es:

$$i_{cc} = \frac{v_{oc}}{Z_g} \quad (37)$$

En la fig. (13c), calculamos la corriente por  $Z_L$  aplicando la fórmula del divisor de corrientes:

$$i_L = \frac{i_{cc} \cdot Z_g}{Z_g + Z_L} \quad (38)$$

y sustituyendo entonces la ec.(37) en la ec.(38):

$$i_L = \frac{v_{oc}}{Z_g + Z_L} \quad (39)$$

Las ec. (36) y (39) son iguales, lo que demuestra la equivalencia entre (b) y (c) en la fig. 13 y por lo tanto la equivalencia entre (c) y (a).

<sup>1</sup> Enunciado por E. L. Norton de los Bell Telephone Laboratories

### 5.5 Teorema de la máxima transferencia de potencia

Una red absorberá la máxima potencia de otra unida a la primera por dos terminales, cuando puede variarse la impedancia de la red receptora, si las impedancias de las dos redes vistas desde los terminales son recíprocamente conjugadas.

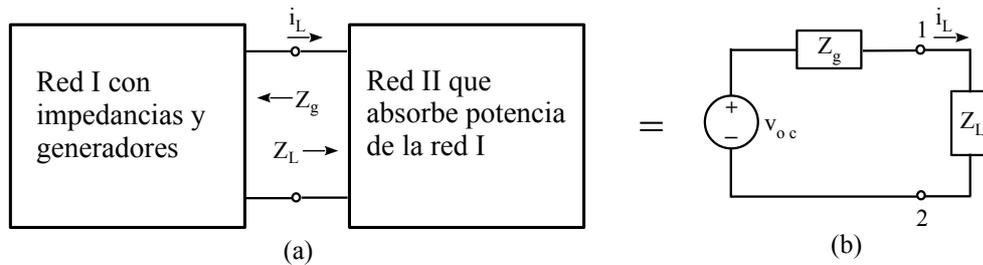


fig. 14

De acuerdo con el teorema de Thévenin, podemos sustituir la red I de la fig. 14a por un generador equivalente con una impedancia interna  $Z_g$  igual a la que se observa entre los terminales de la red conectados al receptor. La red II actúa sólo como un dispositivo de dos terminales capaz de absorber potencia y se puede reemplazar por una única impedancia  $Z_L$ . Los circuitos de las fig. 14a y 14b son por lo tanto equivalentes.

Consideremos en primer término el caso en que tanto  $Z_g$  como  $Z_L$  son resistencias puras, la potencia en  $R_L$  será entonces:

$$i_L = \frac{v_{oc}}{R_g + R_L}$$

$$P_L = |i_L|^2 \cdot R_L = \frac{|v_{oc}|^2 \cdot R_L}{(R_g + R_L)^2} \quad (40)$$

Como dijimos que  $R_g$  es fija y podemos variar  $R_L$  a fin de buscar la máxima transferencia de potencia, podemos considerar a la ec. (40) como una función de variable  $R_L$  y estudiando su derivada primera buscar su máximo.

La derivada se anula para  $R_L = R_g$ , siendo

$$\frac{dP_L}{dR_L} = |v_{oc}|^2 \cdot \frac{(R_g + R_L)^2 - 2R_L(R_g + R_L)}{(R_g + R_L)^4} = |v_{oc}|^2 \cdot \frac{R_g^2 - R_L^2}{(R_g + R_L)^4}$$

positiva para  $R_L < R_g$  y negativa para  $R_L > R_g$ . Por lo tanto la función tendrá un máximo y se obtendrá la máxima potencia cuando:

$$R_L = R_g \quad (41)$$

Si  $Z_g$  y  $Z_L$  no son resistencias puras, sino que tienen reactancia, la ec.(40) se escribirá:

$$P_L = \frac{|v_{oc}|^2 \cdot R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \quad (42)$$

Por simple inspección se advierte que, en lo que respecta a  $X_L$ , la potencia máxima dada por la ec.(42) se obtendrá cuando:

$$X_L = -X_g \quad (43)$$

es decir, si  $Z_g$  es inductiva,  $Z_L$  deberá ser capacitiva y viceversa. Si se satisface la ec. (43), la ec. (42) se reduce a la ec. (40). Combinando entonces ambos criterios expresados en las ec. (41) y (43), vemos que  $Z_L$  debe tener la misma magnitud que  $Z_g$ , pero ambas con ángulos iguales y opuestos, con lo que queda demostrado el teorema.

*Corolario: La máxima potencia que puede absorberse de cualquier red activa es igual a  $|v_{oc}|^2 / 4 \cdot R_g$ , siendo  $v_{oc}$  la tensión en circuito abierto en los terminales de salida y  $R_g$  la componente resistiva que se observa entre sus terminales de salida.*

## Problemas

1) Una red desconocida con dos pares de terminales arroja las siguientes mediciones, con  $i_2$  atrasada respecto de  $i_1$  cuando la carga es resistiva:

$$Z_{o1} = 0 \quad ; \quad Z_{o2} = +j200 \, \Omega \quad ; \quad Z_{s1} = -j50 \, \Omega \quad ; \quad Z_{s2} = \infty$$

Calcular los componentes de la red  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{n}$  equivalentes.

2) De un generador de estructura desconocida se obtienen los siguientes datos a 1 KHz : a) La tensión en circuito abierto es de 10 V. b) La tensión a través de una resistencia de carga de 500 ohm es de 5,25 V. c) La tensión a través de una resistencia de carga de 250 ohm es de 3,46V.

- i) Determinar los componentes del generador equivalente de Thevenin
- ii) Determinar los componentes del generador equivalente de Norton

## Bibliografía

Isabel Lourtie, *Sinai e Sistemas*

Tom Apostol, *Calculus*

Everitt y Anner, *Ingeniería de Comunicaciones*

P. K. McElroy, *Designing Resistive Attenuating Networks*, Proceedings of the IRE - March 1935

Arthur E. Thiessen, *Impedance matching networks*, Electronics - March 1931