

4. Circuitos RLC

Ing. Fernando Ubiría, Ing. Pedro Castro

4.1 Fenómenos electromagnéticos

En 1820, Hans Christian Oersted descubrió que una corriente eléctrica que fluye a través de un conductor produce un campo magnético circular.

André Ampère demostró luego, que dicho campo es linealmente proporcional a la corriente que lo produce. Si se arrolla el conductor en forma helicoidal, los campos magnéticos de las espiras se refuerzan mutuamente.

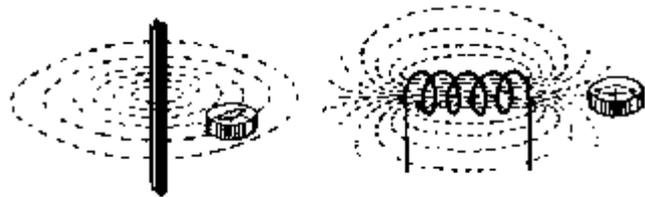


fig. 1

Michael Faraday descubrió en 1831, que si un conductor es sometido a un campo magnético variable, se induce en el mismo una tensión. La tensión inducida surge en los tres casos siguientes:

- 1) Cuando un conductor móvil atraviesa un campo magnético inmóvil o, viceversa, un campo magnético que se traslada atraviesa un conductor inmóvil o cuando un conductor y un campo magnético móviles se desplazan uno respecto al otro. El sentido de la tensión inducida depende de la dirección del movimiento del conductor y del sentido del campo magnético y está dado por la *Regla de la mano derecha*.
- 2) Cuando el campo magnético variable de un conductor, actuando sobre otro conductor induce en él una tensión (inducción mutua).
- 3) Cuando el campo magnético variable de un conductor induce en el mismo conductor una tensión (autoinducción).

Regla de la mano derecha: Si colocamos la mano derecha a lo largo de un conductor inmerso en un campo magnético, de modo que las líneas de fuerza que

salen del polo norte entren por la palma de la mano y el dedo pulgar extendido coincida con la dirección del movimiento del conductor, los otros cuatro dedos extendidos indicarán el sentido de la tensión inducida en el conductor.

En 1834, Heinrich Lenz enunció una ley universal para determinar el sentido de la tensión inducida en un conductor y por ende de la corriente que la misma generará:

Ley de Lenz: *El sentido de la tensión inducida será tal, que la corriente generada por ella y su campo magnético se opondrán a la causa que originara dicha tensión inducida.*

La magnitud de la tensión inducida en el conductor depende de:

- 1) La densidad del campo magnético **B**
- 2) La velocidad de desplazamiento **V** del conductor en el campo magnético
- 3) La longitud activa del conductor **l**
- 4) La magnitud del seno del ángulo α , determinado por el sentido de movimiento del conductor y la dirección del campo magnético

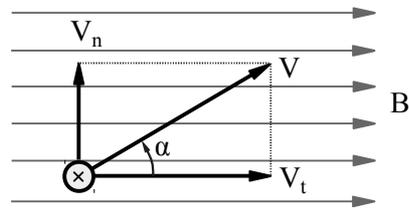


fig. 2

$$v_{ind} = B \cdot l \cdot V \cdot \text{sen } \alpha$$

En los diagramas, cuando un conductor ha sido representado como sección, la flecha que indica la dirección de la corriente se representa por una cruz si la misma fluye desde nosotros hacia la hoja y por un punto en el caso contrario.

Sí se introduce un imán en una bobina de alambre conductor, la aguja del galvanómetro se desviará. La corriente inducida circula en un sentido tal, que el campo magnético generado se opone al del imán repeliéndolo. Cuando se extrae el imán, la corriente inducida circula en sentido opuesto, el campo magnético de la bobina se invierte y ahora atrae al imán. La tensión

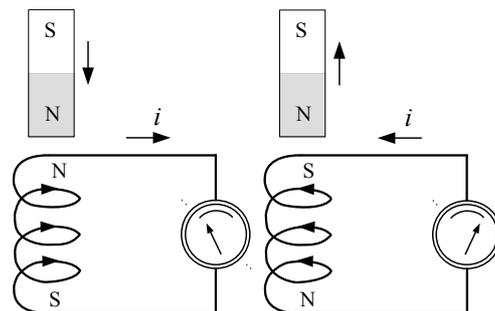


fig. 3

inducida es proporcional a la velocidad con que se introduce o se saca el imán, o sea, a la velocidad de variación del flujo:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

El signo de - indica el sentido de la tensión inducida, según la Ley de Lenz.

Fuerza electromotriz de autoinducción

Si en la fig. 4 se activa el interruptor y se conecta la batería a la bobina, en el circuito surge una corriente eléctrica i que circulará en la dirección indicada por las flechas. Tan pronto como aparece la corriente, surge un campo magnético cuyas líneas de fuerza atraviesan el conductor de la bobina e inducen una tensión o fuerza electromotriz. Esta tensión inducida, según la Ley de Lenz, tiene una polaridad tal que se opone al paso de la corriente. De este modo, la corriente eléctrica aumentará paulatinamente, hasta alcanzar un valor que estará limitado solamente por la resistencia óhmica del circuito. A partir de entonces, circulará una corriente conti-

nua y desaparecerá la tensión de autoinducción. A partir de este momento, el campo magnético será constante.

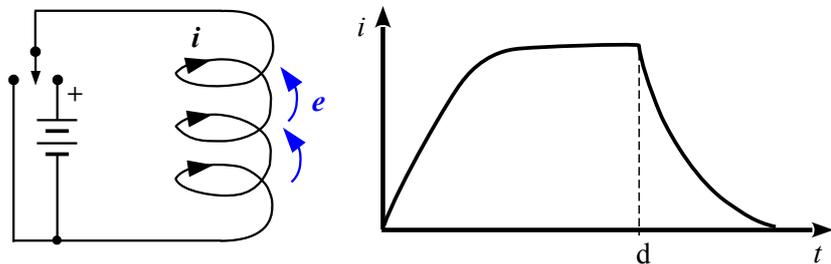


fig. 4

Sí se conmuta el interruptor en el instante d , desconectando la batería y conectando los bornes de la bobina entre sí, al desaparecer la corriente disminuye el campo magnético debido a la misma. Se inducirá ahora una fuerza electromotriz en sentido contrario, que tenderá ahora a mantener la circulación de corriente, haciendo que la misma disminuya paulatinamente.

Como vimos, la magnitud de la fuerza electromotriz de autoinducción depende de la velocidad de variación del flujo electromagnético Φ que atraviesa a la bobina y por lo tanto de la velocidad de variación de la corriente que lo genera.

El flujo magnético es proporcional a la corriente que fluye por el circuito. El coeficiente de proporcionalidad se denomina *inductancia*, se lo simboliza mediante la letra L y se mide en Henrys.

$$\Phi = L \cdot I$$

Si la corriente en un circuito cambia a una velocidad di/dt , el flujo magnético variará a una velocidad $d\Phi/dt$ y la tensión de autoinducción que surgirá en la bobina será:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{di}{dt}$$

El elemento de circuito que guarda esta relación entre tensión autoinducida y corriente, recibe formalmente el nombre de *inductor*. Volveremos a hablar sobre el mismo en breve.

4.2 Generación de la corriente alterna

Supongamos que en el interior de un campo magnético homogéneo, bajo la acción de una fuerza exterior, un conductor metálico rectilíneo de longitud l rota en el sentido de las agujas del reloj con una velocidad angular constante ω expresada en rad/seg (fig. 5a). Para calcular la magnitud de la tensión inducida, debemos descomponer la velocidad \mathbf{V} en dos componentes, una paralela y otra normal al campo magnético \mathbf{B} .

La componente normal es la que cuenta a los efectos de la generación y está dada por: $V_n = V \cdot \text{sen } \alpha$

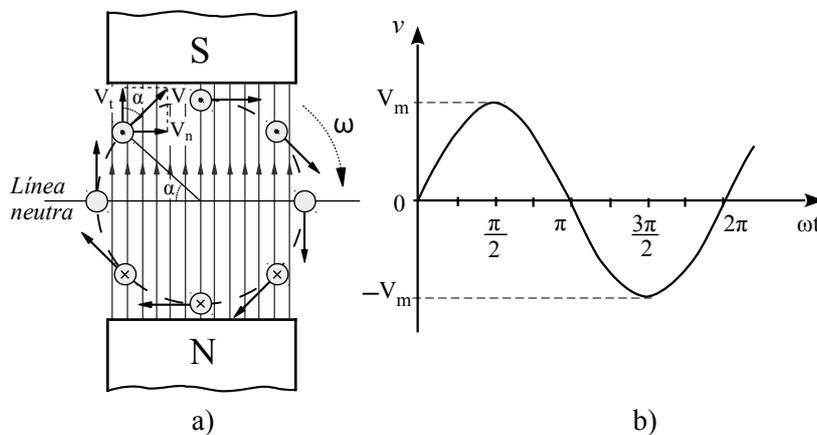


fig. 5

Durante el movimiento, el conductor ocupará diversas posiciones, hemos marcado 8 posiciones situadas a intervalos de $\pi/4$ rad, o sea cada 45° . La fig. 5b es una gráfica de la tensión inducida instantánea v . Vemos que el valor de la tensión inducida varía con la posición del conductor en forma proporcional al $\text{sen } \alpha$ y tendrá un valor máximo $V_m = B \cdot l \cdot V$ cuando $\alpha = \pi/2$ rad. Además, al pasar la línea neutra la dirección de la tensión inducida se invierte, conforme a la regla de la mano derecha.

El ángulo que forma el radio que une la posición instantánea del conductor con el centro de giro forma también el mismo ángulo α con la línea neutra. Si asumimos que en el instante inicial $t = 0$ el conductor está sobre la línea neutra en la posición correspondiente a $\alpha = 0$, tendremos que $\alpha = \omega \cdot t$.

Podemos entonces expresar la tensión inducida en el conductor en función del tiempo como:

$$v(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (1)$$

La tensión inducida $v(t)$ sigue entonces una ley sinusoidal, cambiando su dirección y magnitud periódicamente y repitiéndose exactamente a sí misma.

Valor instantáneo: Es el valor en un momento dado de una magnitud variable y se lo designa con una letra minúscula cursiva, por ej. v .

Período: El período define la duración de un ciclo completo de $v(t)$.

Es el menor número positivo T para el que se cumple que $v(t+T) \equiv v(t) \forall t$

En la fig. 5, hemos representado $v(t)$ en función de ωt

$$\text{Si } v(\omega t+T) \equiv v(\omega t) \forall t \Rightarrow T = 2\pi \text{ rad.} \quad (2)$$

En la fig. 6 hemos vuelto a dibujar la gráfica de $v(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t)$, pero esta vez como función del tiempo. Ahora, el período es un tiempo T que se mide en segundos.

Una onda senoidal debe completar $1/T$ periodos cada segundo.

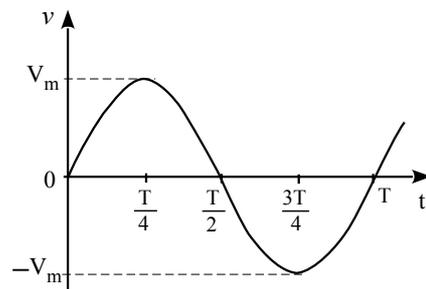


fig. 6

Frecuencia: Es el inverso del período y se mide en Hertz.

Si combinamos la ec. (2), con el hecho de que cuando se cumpla un ciclo deberá haber transcurrido un tiempo T

$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

Combinando ambas ecuaciones, encontramos la relación entre la frecuencia f y la llamada frecuencia angular ω

$$\Rightarrow \omega = 2\pi f \quad (4)$$

Fase: Es posible elegir como tiempo inicial $t = 0$ un instante en el cual el conductor no esté sobre la línea neutra como en la fig. 5a, sino formando un cierto ángulo θ . Esto nos lleva a una expresión más general de la tensión inducida, pues la ec. (5) incluye ahora un *ángulo de fase* θ en su argumento. La figura 7 muestra las gráficas correspondientes a las ec. (1) y (5).

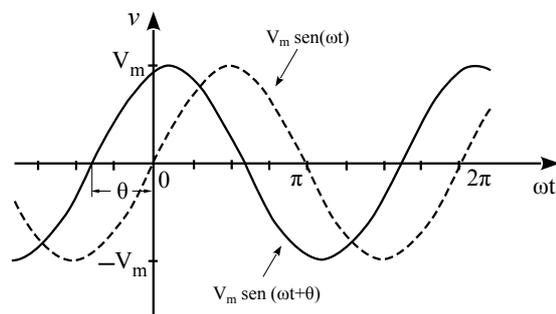


fig. 7

$$v(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (5)$$

Podemos ver que la onda de la ec. (5) se ha desplazado hacia la izquierda o adelantado en el tiempo θ radianes respecto a la onda seno original.

También se puede decir que la onda de la ec. (1) está atrasada respecto a la onda de la ec. (5). Se dice que las dos ondas están fuera de fase. Si el ángulo θ fuera cero, los ángulos de fase serían iguales y se diría que ambas ondas están en fase.

4.3 El inductor

El inductor es un elemento pasivo capaz de almacenar y entregar cantidades finitas de energía. Como vimos en 4.1, Faraday descubrió que el campo magnético variable de un conductor atravesado por una corriente variable, induce en el mismo conductor una tensión. Mostró además, que esa tensión es proporcional a la velocidad de variación de la corriente que produce dicho campo magnético.

La constante de proporcionalidad recibe el nombre de inductancia y se la representa por la letra L , siendo su unidad el Henry. La fig. 8 nos muestra el símbolo con el que se representa un inductor y la ec. (6) expresa la relación entre la corriente que lo atraviesa y la tensión entre sus terminales. Observe que tanto i como v son funciones del tiempo y que v y la f.e.m. de autoinducción e , que vimos en el apartado 4.1, son iguales pero tienen signos opuestos.

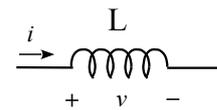


fig. 8

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (6)$$

El inductor ideal definido por la ec. (6), es un modelo matemático que sirve para aproximar el comportamiento de un dispositivo real, el cual se puede construir arrollando un alambre conductor en forma de bobina.

Por ejemplo, la inductancia de un inductor cilíndrico de una capa y con núcleo de aire, se puede calcular mediante la ec. (7). Esta fórmula¹ empírica tiene una precisión del 1% si $l > 0,8 \cdot r$.

$$L = \frac{0,394 \cdot r^2 \cdot N^2}{9r + 10l} \quad (7)$$

L - inductancia en μH
 r - radio en cm
 N - número de espiras
 l - longitud en cm

Si un inductor ideal es atravesado por una corriente constante, la velocidad de variación de la misma es $di/dt = 0$ y por lo tanto la ec. (6) nos dice que $v = 0$, o sea que se comporta como un cortocircuito para la corriente continua.

¹ Publicada en *Proceedings of the IRE* de octubre de 1928 por Harold Alden Wheeler (1903 - 1996)

Ejemplos

Analicemos el comportamiento de un inductor de 2 H, el cual es atravesado por una corriente cuya forma de onda se muestra en la fig. 9a. Entre 0 y 1s, la corriente aumenta linealmente con una pendiente de 1 A/s, obteniéndose una tensión constante de 2 V. Entre 1 y 3 s, la corriente se mantiene constante, por lo que $v(t)=0$. Entre 3 y 4 s, la corriente disminuye linealmente con una pendiente de -1 A/s, obteniéndose una tensión constante de -2 V.

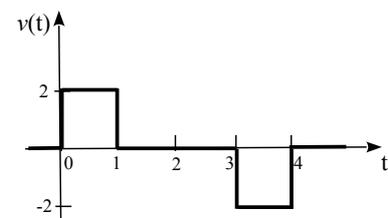
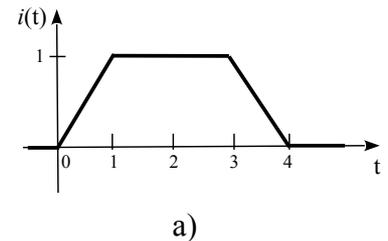


fig. 9 b)

La fig. 9b muestra la forma de la onda de tensión en el mismo espacio de tiempo.

Observando el ejemplo anterior, podemos ver que si la corriente llegase a 1 A en 0,5 s, la pendiente sería de 2 A/s y la tensión en el inductor sería 4 V.

Es válido preguntarnos que ocurriría si el aumento de corriente fuera abrupto. En ese caso, la pendiente sería infinita y por lo tanto también lo sería la tensión en el inductor, lo cual físicamente no es posible.

Veamos ahora que sucede si la corriente $i(t)$ que atraviesa un inductor es sinusoidal. Si derivamos $i(t)$ respecto a t para calcular su velocidad de variación, nos encontramos con que $v(t)$ será también sinusoidal pero adelantada $\pi/2$ rad. respecto a $i(t)$, tal como lo muestra la ec. (8).

$$i = I_m \sin(\omega t) \Rightarrow v = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cos(\omega t) = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8)$$

También se puede decir, que la corriente que atraviesa al inductor está *atrasada* 90° con respecto a la tensión presente entre sus bornes. En la fig. 10 se han graficado i y v .

Veremos ahora que relación tienen ambas con la f.e.m. e .

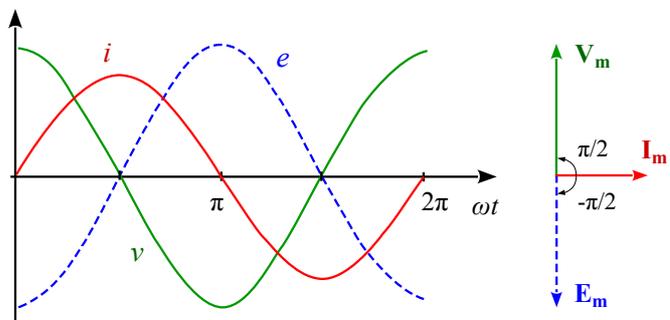


fig. 10

Si observamos la variación de i en función de ωt , vemos que la velocidad de variación es máxima cerca de sus valores nulos. La corriente alterna sinusoidal varía entonces no sólo de magnitud y de dirección, si no que también varía su velocidad de variación. La f.e.m. de autoinducción e dependerá de la velocidad de variación de i , alcanzando su máximo valor cuando $i = 0$. Siguiendo la ley de Lenz, ha de impedir la variación de la corriente oponiéndose a que ésta crezca cuando aumenta y sosteniéndola cuando disminuye. Puesto que en los circuitos de AC la f.e.m. de autoinducción se opone ininterrumpidamente a las variaciones de la corriente, para que la corriente i pueda pasar por las espiras del inductor, la tensión de la red de alimentación debe compensar la f.e.m. de autoinducción. En otras palabras, la tensión v en los bornes del inductor ha de ser en cada momento igual y opuesta a e .

La corriente en el inductor en función de la tensión

Reordenando la ec. (6) e integrando ambos miembros, podemos hallar una expresión de $i(t)$ en función de $v(t)$. Los límites superiores de integración serán el tiempo t y la corriente $i(t)$ y los límites inferiores un tiempo t_0 y la corriente $i(t_0)$.

$$di = \frac{1}{L} v \cdot dt \Rightarrow \int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v \cdot dt \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v \cdot dt + i(t_0) \quad (9)$$

Potencia y energía en el inductor

La potencia absorbida está dada por el producto de la tensión y la corriente, partiendo de la ec. (6):

$$p = v \cdot i = L \cdot i \frac{di}{dt} \quad \text{W}$$

La energía w_L aceptada por el inductor se almacena en el campo magnético alrededor de la bobina y es la integral de la potencia en el intervalo de t_0 a t .

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \int_{t_0}^t p \cdot dt = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dt} dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i \cdot di = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \} \quad \text{J}$$

Si la corriente inicial $i(t_0) = 0$, entonces la energía almacenada en $t_0 = 0$ también es 0.

$$\Rightarrow w_L(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (10)$$

Independientemente de su dirección, en cualquier momento en que $i \neq 0$ habrá energía almacenada en el inductor y no habrá energía almacenada cuando $i = 0$.

En un inductor *ideal*, se puede recuperar toda la energía almacenada. En un inductor *real*, el alambre tendrá una cierta resistencia asociada que producirá pérdida de energía. Un inductor real se puede representar mediante un inductor ideal con una resistencia en serie.

Conexión de inductores en serie

Para calcular la inductancia equivalente L_{eq} del circuito de la fig. 11, planteamos su ecuación de malla y sustituimos en ella cada una de las tensiones por la ec. (6):

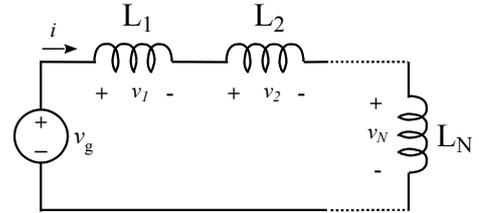


fig. 11

$$v_g = v_1 + v_2 + \dots + v_N = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt}$$

De donde podemos deducir que la inductancia equivalente de una agrupación en serie de inductores es igual a la suma de sus inductancias individuales.

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n \quad (11)$$

Conexión de inductores en paralelo

Para calcular la inductancia equivalente L_{eq} , escribiremos la ecuación de nudos del circuito original fig. 12 a), sustituiremos en ella las i_n mediante la ec. (9) y la compararemos con la ecuación del circuito equivalente b).

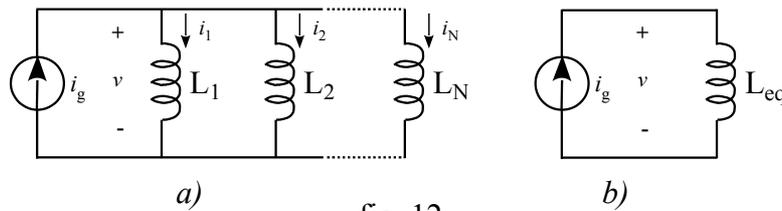


fig. 12

$$i_g = \sum_{n=1}^N i_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v \cdot dt + i_n(t_0) \right] = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v \cdot dt + \sum_{n=1}^N i_n(t_0) \quad (a)$$

Por Kirchhoff, la corriente i_g en el instante t_0 es igual a la suma de las corrientes de las ramas i_n en t_0 , por lo que los dos términos integrales de las ec. (a) y (b) deben ser iguales. La inductancia equi-

$$i_g = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v \cdot dt + i_g(t_0) \quad (b)$$

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_N} \quad (12)$$

valente de los inductores en paralelo se calcula entonces mediante la ec. (12).

4.4 El capacitor

El capacitor (o condensador) también es un elemento pasivo capaz de almacenar y entregar cantidades finitas de energía. La corriente que lo atraviesa es proporcional a la velocidad de variación de la tensión aplicada.

La constante de proporcionalidad se llama *capacidad* y se la representa por la letra C , siendo su unidad el Farad.

La fig. 13 nos muestra el símbolo con el que se representa un capacitor y la ec. (13) expresa la relación tensión-corriente. Debe observarse que tanto v como i son funciones del tiempo. El capacitor ideal definido por (13), es un modelo matemático que sirve para aproximar el comporta-

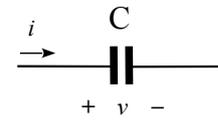


fig. 13

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

miento de un dispositivo real. Un capacitor real consta de dos superficies conductoras separadas por una fina capa de aislante, sobre las cuales se almacena una carga eléctrica cuando se les aplica una diferencia de potencial.

Cuando en el capítulo 1 estudiamos la corriente eléctrica, definimos su intensidad i como:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Si sustituimos la definición de i en la ec. (13), simplificamos e integramos ambos miembros, obtendremos la ec. (14), la

$$q = C \cdot v \quad (14)$$

cual nos permite calcular la carga en Coulombs almacenada en un condensador.

Sí hay una tensión constante aplicada a un capacitor, la velocidad de variación de la misma $dv/dt = 0$ y la ec. (13) nos dice que la corriente $i = 0$, o sea que se comporta como un circuito abierto para la corriente continua.

Sí, por el contrario, hubiera un salto abrupto en la tensión v , tendríamos que $dv/dt = \infty$, lo cual implicaría $i = \infty$, lo que no es posible físicamente.

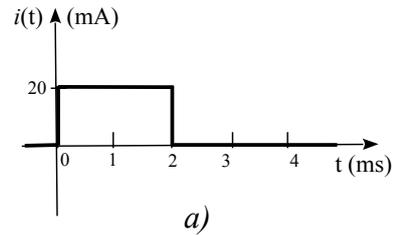
La tensión en el capacitor en función de la corriente

Reordenando la ec. (13) e integrando ambos miembros, podemos hallar una expresión de $v(t)$ en función de $i(t)$. Los límites superiores de integración serán el tiempo t y la tensión $v(t)$ y los límites inferiores un tiempo t_0 y la tensión correspondiente $v(t_0)$.

$$dv = \frac{1}{C} i \cdot dt \Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \cdot dt \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \cdot dt + v(t_0) \quad (15)$$

Ejemplos

Sea un capacitor de $5 \mu\text{F}$ al que se le aplica un pulso rectangular de corriente de 20 mA y 2 ms de duración, como se muestra en la fig 14a. Se supone además que en $t = 0$ el capacitor está descargado y por lo tanto $v(0s) = 0 \text{ V}$.



La ec. (13) nos dice que sólo puede circular corriente cuando v varía, por lo tanto v debe variar entre 0 y 2 ms y luego mantener un valor constante. Analizaremos entonces dos intervalos por separado: a) $0 \leq t < 2\text{ms}$ y b) $2\text{ms} < t$.

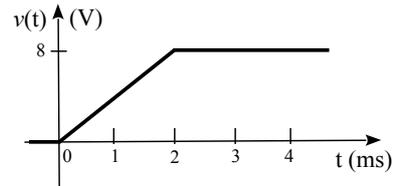


fig. 14 b)

a) Sustituyendo valores para $0 \leq t < 2\text{ms}$ en la ec. (15):

El resultado de la integral es la ecuación de una recta:

$$v(t) = \frac{1}{5\mu\text{F}} \int_0^t 20\text{mA} \cdot dt + v(t_0) = \frac{20\text{mA}}{5\mu\text{F}} t \Big|_0^t + 0$$

La tensión aumenta linealmente desde 0 V para $t = 0$ hasta 8 V para $t = 2 \text{ ms}$

b) Sustituyendo valores para $t > 2\text{ms}$, $i(t) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{5\mu\text{F}} \int_{2\text{ms}}^t 0 \cdot dt + 8 \text{ V} = 0 + 8 \text{ V} = 8 \text{ V} \quad \forall t > 2 \text{ ms}$$

Veamos ahora que sucede si la tensión $v(t)$ que se aplica a un capacitor es sinusoidal. Si derivamos $v(t)$ respecto a t para calcular su velocidad de variación, nos encontramos con que $i(t)$ será también sinusoidal pero adelantada $\pi/2$ rad. respecto a $v(t)$, tal como lo muestra la ec. (16).

$$v = V_m \sin(\omega t) \Rightarrow i = C \frac{dv}{dt} = \omega C \cdot V_m \cos(\omega t) = \omega C \cdot V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (16)$$

La corriente que atraviesa al capacitor está entonces adelantada 90° con respecto a la tensión entre sus bornes, tal como lo muestra la fig. 15.

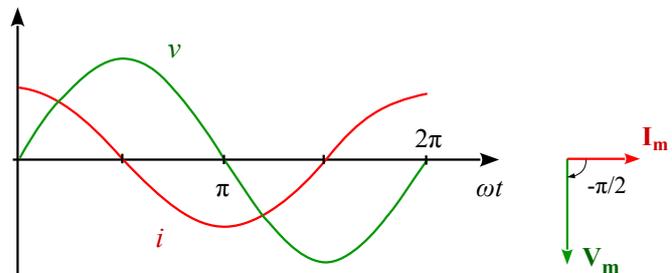


fig. 15

Potencia y energía en el capacitor

La potencia absorbida está dada por el producto de la tensión y la corriente, partiendo de la ec. (13):

$$p = v \cdot i = C \cdot v \frac{dv}{dt} \quad W$$

La energía w_C almacenada por el capacitor en su campo eléctrico, es la integral de la potencia en el intervalo de t_0 a t .

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \int_{t_0}^t p \cdot dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v \cdot dv = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \} \quad J$$

Si la tensión inicial $v(t_0) = 0$, entonces la energía almacenada en $t_0 = 0$ también es 0.

$$\Rightarrow w_C(t) = \frac{1}{2} C [v(t)]^2 \quad (17)$$

En un capacitor *ideal*, se puede recuperar toda la energía almacenada. En un capacitor *real*, parte de la carga se pierde a través del dieléctrico y parte de la energía se disipa en la resistencia de las placas conductoras que lo componen. Un capacitor real se puede representar mediante un capacitor ideal con una resistencia en serie o en paralelo.

Conexión de capacitores en serie

Escribiremos la ecuación de malla del circuito de la fig. 16a, sustituiremos luego las v_n mediante la ec. (15) y la compararemos con la ecuación del circuito de la fig. 16b.

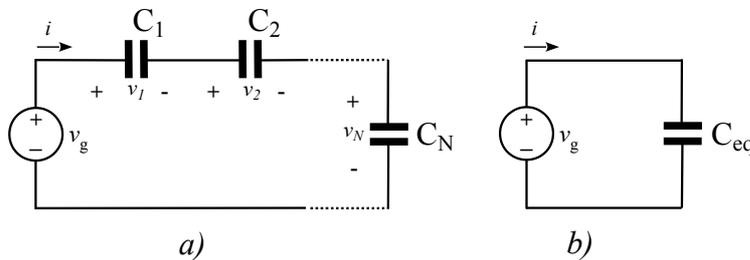


fig. 16

$$v_g = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i \cdot dt + v_n(t_0) \right] = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i \cdot dt + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \quad (a)$$

Por Kirchhoff, la tensión v_g en el instante t_0 es igual a la suma de las tensiones de los capacitores v_n en t_0 , por lo que los dos términos integrales de las ec. (a) y (b) deben ser iguales. La capacidad

$$v_g = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i \cdot dt + v_g(t_0) \quad (b)$$

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N} \quad (18)$$

equivalente de los capacitores en serie se calcula entonces mediante la ec. (18).

Conexión de capacitores en paralelo

Para calcular la capacidad equivalente C_{eq} del circuito de la fig. 17, planteamos su ecuación de nudos y sustituimos en ella cada una de las corrientes por la ec. (13):

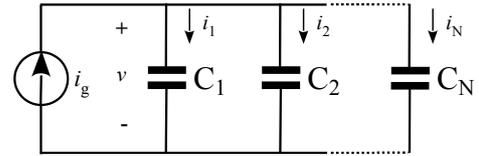


fig. 17

$$i_g = i_1 + i_2 + \dots + i_N = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt}$$

De donde deducimos que la capacidad equivalente de una agrupación en paralelo de capacitores es igual a la suma de sus capacidades individuales.

$$C_{eq} = \sum_{n=1}^N C_n \quad (19)$$

4.5 El circuito RL

Vamos a hacer el análisis del circuito RL de la fig. 18. Para ello, aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff y escribimos su ecuación de malla (20). La misma es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Obtener una solución significa, encontrar una función $i(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial y también satisfaga la distribución prescrita de la energía en el inductor en un instante t dado.

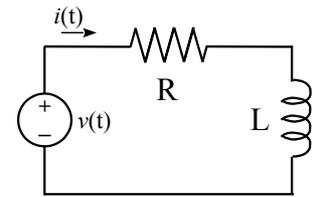


fig. 18

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = v(t) \quad (20)$$

Para resolverla, reordenaremos los términos y multiplicaremos ambos lados por lo que se conoce como factor de integración. Cada lado se convierte entonces en una diferencial exacta, que puede integrarse directamente para obtener la solución.

Para esta ecuación, el factor de integración es $e^{Rt/L}$.

$$\Rightarrow e^{Rt/L} di + \frac{R}{L} e^{Rt/L} i \cdot dt = \frac{v(t)}{L} e^{Rt/L} dt$$

El miembro de la izquierda tiene la misma forma que la derivada de un producto de funciones: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
 Por lo tanto podemos reescribirlo como la diferencial exacta de $i \cdot e^{Rt/L}$:

A continuación integramos ambos miembros:

$$\Rightarrow i \cdot e^{Rt/L} = \int \frac{v(t)}{L} e^{Rt/L} dt + A$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros por $e^{-Rt/L}$ obtenemos:

$$i(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int v(t) e^{Rt/L} dt + A \cdot e^{-Rt/L} \quad (21)$$

Vemos que la expresión de la corriente $i(t)$ consta de dos términos:

El 1º depende de la función de excitación $v(t)$ y es la llamada *respuesta forzada* o *respuesta en estado estable permanente*, los matemáticos la llaman integral particular.

El 2º término es la llamada *respuesta natural* o *transitoria*, o solución complementaria. El mismo depende sólo de los elementos pasivos del circuito y tiende a 0 con el tiempo. La constante A deberá determinarse a partir de un valor conocido de i en un momento determinado t .

La razón física de que la respuesta tenga dos partes, forzada y natural, es la siguiente: A la larga, el circuito sólo tendrá la respuesta forzada. Sin embargo, en el momento de accionar los interruptores o activar los generadores, las corrientes iniciales de los inductores (o tensiones de los capacitores) tendrán valores que dependerán solamente de la energía almacenada en esos elementos. Habrá entonces un período transitorio, durante el cual las corrientes y tensiones cambien de sus valores iniciales dados a sus valores finales requeridos.

4.5.1 Respuesta a un pulso rectangular

Utilizaremos para nuestro análisis el circuito de la fig. 19. El interruptor está en la posición 1 y no circula corriente a través del inductor. En $t = 0$, el interruptor conmuta a 2 y luego de un tiempo t_p retorna a 1, como se ve en la fig. 20a.

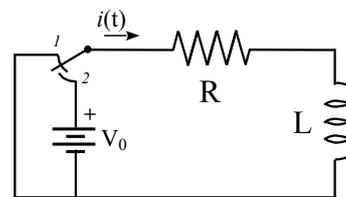


fig. 19

Para $0 \leq t \leq t_p$ Sustituimos en la ec. (21) $v(t)$ por su valor V_0 :

$$i(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int V_0 e^{Rt/L} dt + A \cdot e^{-Rt/L} = \frac{e^{-Rt/L}}{L} V_0 \frac{L}{R} e^{Rt/L} + A \cdot e^{-Rt/L} = \frac{V_0}{R} + A \cdot e^{-Rt/L} \quad (22)$$

Nos resta calcular el valor de la constante A. Para ello necesitamos conocer el valor de $i(t)$ para algún t determinado. Como en $t=0$ no circula corriente, sabemos que $i(0)=0$. Podemos entonces sustituir esos valores en la ec. (22) y despejar A:

$$i(0) = \frac{V_0}{R} + A e^{-R \cdot 0/L} = 0$$

Sustituimos en la ec. (22) el valor de $A = -V_0/R$ y obtenemos la ec. (23), válida entre $t = 0$ y $t = t_p$:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \quad (23)$$

Cuando t tiende a ∞ , i tiende al valor V_0/R en forma exponencial, aunque sin alcanzarlo, como se ve en la fig. 20b.

La curva será la misma para todo circuito que tenga la misma relación R/L , la cual determina que tan rápido "crece" la exponencial. Si se aumenta L manteniendo R constante, se necesitará más tiempo para alcanzar el mismo valor y la exponencial se verá más "ancha". La razón física es que, si L aumenta, esto permite almacenar una mayor cantidad de energía para una misma variación de i de 0 a V_0/R y se requiere más tiempo para acumularla si circula la misma corriente.

Para caracterizar el circuito, calcularemos el tiempo que tardaría la corriente en alcanzar ese valor *si continuara creciendo a la tasa inicial*.

Para obtener el coeficiente angular de la tangente a la exponencial en $t = 0$, calcularemos la derivada de:

$$\frac{i(t)}{V_0/R} = (1 - e^{-Rt/L}) \Rightarrow$$

El tiempo que $i(t)/(V_0/R)$ tardaría en llegar de 0 a 1 si creciera siempre a la tasa inicial, se llama *constante de tiempo*, se la designa con la letra τ y se mide en segundos:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{i}{V_0/R} \Big|_{t=0} = \frac{R}{L} e^{-Rt/L} \Big|_{t=0} = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{L} \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R} \text{ s}$$

El valor real de i para $t = \tau$ es

$$i(\tau) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{V_0}{R}$$

Conviene medir la corriente en tiempos que sean múltiplos de τ :

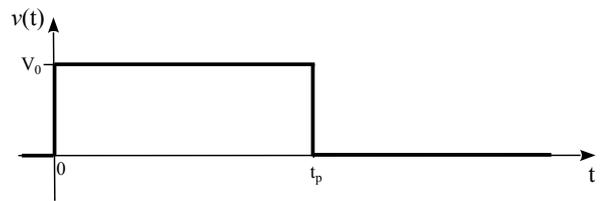
$$t = 2\tau \Rightarrow i(2\tau) = 0,865 V_0/R$$

$$t = 3\tau \Rightarrow i(3\tau) = 0,950 V_0/R$$

$$t = 4\tau \Rightarrow i(4\tau) = 0,982 V_0/R$$

$$t = 5\tau \Rightarrow i(5\tau) = 0,993 V_0/R$$

Para 5 τ , la diferencia con el valor V_0/R es menos del 1%.



a)

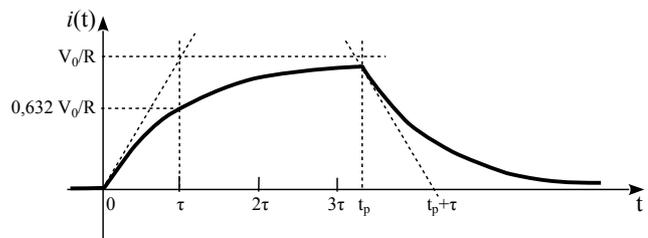


fig. 20 b)

Para $t > t_p$ Sostituimos en la ec. (21) $v(t)$ por su nuevo valor 0,

obteniendo la ec. (24):
$$i(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int 0 \cdot e^{Rt/L} dt + B \cdot e^{-Rt/L} = B \cdot e^{-Rt/L} \quad (24)$$

Nos resta calcular la constante B. La ec. (23) nos permite conocer el valor de $i(t)$ en el instante t_p , antes de conmutar el interruptor. Podemos igualar ambas

$$i(t_p) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt_p/L})$$

ecuaciones y despejar el valor de B :

$$\frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt_p/L}) = B \cdot e^{-Rt_p/L} \Rightarrow B = \frac{V_0}{R}(e^{Rt_p/L} - 1)$$

Sostituimos en la ec. (24) el valor de B hallado y la multiplicamos y dividimos por $e^{Rt_p/L}$. Operando, obtenemos la ec. (25), válida para $t > t_p$.

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(e^{Rt_p/L} - 1)e^{-Rt/L} \frac{e^{Rt_p/L}}{e^{Rt_p/L}} \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt_p/L})e^{R(t_p-t)/L} \quad (25)$$

Vemos que cuando t tiende a ∞ , i tiende a 0 en forma exponencial, aunque sin alcanzarlo, como se ve en la fig. 20b para $t > t_p$.

Para obtener el coeficiente angular de la tangente a la exponencial en $t = t_p$, calcularemos la derivada de:

$$\frac{i(t)}{i(t_p)} = e^{R(t_p-t)/L} \Rightarrow$$

El tiempo que $i(t)/i(t_p)$ tarda en llegar de 1 a 0 suponiendo una tasa

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{i}{i(t_p)} \Big|_{t=t_p} = -\frac{R}{L} e^{R(t_p-t)/L} \Big|_{t=t_p} = -\frac{R}{L}$$

de decaimiento constante, es nuestra vieja conocida la *constante de tiempo* τ .

4.6 El circuito RC

Como ejemplo, vamos a analizar la respuesta a un escalón del circuito de la fig. 21. Nuestro objetivo es estudiar la tensión $v(t)$ sobre el condensador. El interruptor se cierra en $t = 0$ y se supone que el condensador está descargado hasta ese momento.

Primero escribimos su ecuación de malla (26) y luego sustituimos en ella i por la ec. (13), la cual expresa la relación tensión-corriente en el capacitor C, obteniendo así una ecuación diferencial:

Reordenándola, vemos que se parece a la que obtuvimos al analizar el circuito RL, vamos a

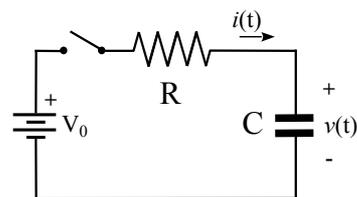


fig. 21

$$R \cdot i + v(t) = V_0 \quad (26)$$

$$R C \frac{dv}{dt} + v = V_0$$

$$dv + \frac{1}{RC} v \cdot dt = \frac{V_0}{RC} dt$$

multiplicar entonces ambos lados por el factor de integración $e^{t/RC}$:

$$e^{t/RC} dv + \frac{1}{RC} v \cdot e^{t/RC} dt = \frac{V_0}{RC} e^{t/RC} dt$$

De nuevo, el miembro de la izquierda tiene la forma de la derivada de un producto de funciones: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Por lo tanto, lo podemos reescribir como la diferencial exacta de $v \cdot e^{t/RC}$:

$$\Rightarrow d(v \cdot e^{t/RC}) = \frac{V_0}{RC} e^{t/RC} dt$$

A continuación integramos ambos miembros:

$$\Rightarrow v \cdot e^{t/RC} = \int \frac{V_0}{RC} e^{t/RC} dt + A$$

Si multiplicamos ambos miembros por $e^{-t/RC}$ y luego integramos, obtenemos la ecuación (27):

$$\Rightarrow v(t) = e^{-t/RC} \int \frac{V_0}{RC} e^{t/RC} dt + A \cdot e^{-t/RC} = V_0 + A \cdot e^{-t/RC} \quad (27)$$

Vemos que hemos obtenido una ecuación que formalmente es similar a la (22), compuesta por un término V_0 que es en este caso la respuesta forzada y por un 2º término que tiende a 0 con el tiempo que es la respuesta natural.

Para calcular la constante A, como sabemos que el condensador está descargado en $t = 0$ y entonces $v(0) = 0$, sustituimos esos valores en (27) y despejamos A:

$$v(0) = V_0 + A e^{-0/RC} \\ \Rightarrow A = -V_0$$

Sustituyendo el valor de A hallado, obtenemos la ec. (28), la cual tiene la misma forma que la (23), con el intercambio de tensiones por corrientes.

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (28)$$

Cuando t tiende a ∞ , v tiende al valor V_0 en forma exponencial, aunque sin alcanzarlo, como se ve en la fig. 22.

Al igual que para el circuito RL, calcularemos el tiempo que tardaría la tensión en alcanzar ese valor si continuara creciendo a la tasa inicial.

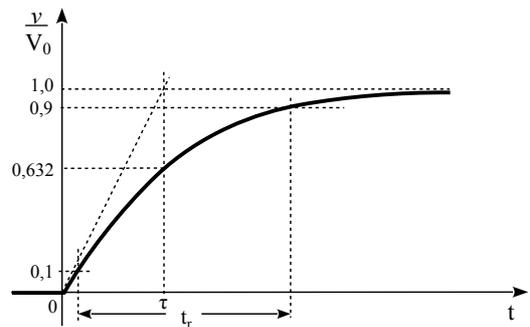


fig. 22

Para obtener el coeficiente angular de la tangente a la exponencial en $t=0$, calcularemos la derivada de:

$$\frac{v(t)}{V_0} = (1 - e^{-t/RC}) \Rightarrow$$

obteniendo entonces:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{v}{V_0} \Big|_{t=0} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \Big|_{t=0} = \frac{1}{RC}$$

Siendo entonces la constante de tiempo para el circuito RC

$$\Rightarrow \frac{1}{RC} \tau = 1 \Rightarrow \tau = RC \text{ s}$$

Se llama *tiempo de subida (rise time)* al tiempo invertido por la tensión para crecer desde el 10 % hasta el 90 % de su valor final.

Despejando t en la ec. (28), se encontrará que los tiempos son 0,1·RC y 2,3·RC respectivamente, restándolos obtenemos:

$$t_r = 2,2 \tau$$

4.7 Respuesta en estado senoidal permanente

Analizaremos el circuito RL de la fig. 23 con excitación senoidal. Asumiremos que, como la fuente senoidal $v(t)$ se conectó en algún instante ya lejano, la respuesta natural ha desaparecido por completo.

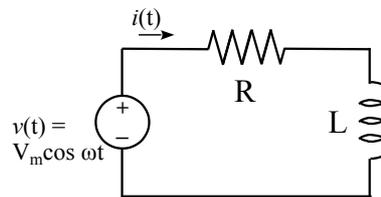


fig. 23

Su ecuación de malla (29) es similar a la ec. (20), cuya solución genérica es la ec. (21), la cual reproducimos aquí para mayor comodidad:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = V_m \cos(\omega t) \quad (29)$$

$$i(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int v(t) e^{Rt/L} dt + A \cdot e^{-Rt/L}$$

Hemos dicho que la respuesta natural ha desaparecido por completo, o sea que el 2º término es 0. Si sustituimos $v(t) = V_m \cos \omega t$, obtenemos la ec. (30):

$$i(t) = \frac{e^{-Rt/L}}{L} \int V_m \cos(\omega t) e^{Rt/L} dt \quad (30)$$

La integral que debemos resolver es de una forma conocida y su solución puede encontrarse en una tabla de integrales:

$$\int e^{ax} \cos bx \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

Aplicamos a la ec. (30) la fórmula para la solución de la integral:

$$i(t) = \frac{V_m e^{-Rt/L}}{L} \cdot \frac{e^{Rt/L}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t\right)$$

Operando en el 2º miembro y multiplicando y dividiendo el 2º término por L, obtenemos la respuesta forzada ec. (31)

$$i(t) = \frac{V_m R}{L^2 \left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right]} \cos \omega t + \frac{V_m \omega}{L \left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right]} \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{V_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen} \omega t \quad (31)$$

Esta expresión es algo complicada y es preferible obtener una de la forma $i(t) = A \cos(\omega t - \theta) = A \cos \theta \cos \omega t + A \sin \theta \sin \omega t$.

Para hallar cuánto deben valer A y θ , igualamos esta identidad trigonométrica con la ec. (31):

$$A \cos \theta \cos \omega t + A \sin \theta \sin \omega t = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{V_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \Rightarrow$$

y obtenemos las dos ecuaciones:

$$A \cos \theta = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad ; \quad A \sin \theta = \frac{V_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow$$

Dividiéndolas obtenemos θ y elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas obtenemos A:

$$\Rightarrow \frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{\omega L}{R}$$

$$\Rightarrow A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = \frac{V_m^2 R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{V_m^2 \omega^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Sustituyendo en $i(t) = A \cos(\omega t - \theta)$ los valores hallados para A y θ , la expresión final de la respuesta

forzada será la ec. (32):

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (32)$$

Se observa que la amplitud de $i(t)$ es proporcional a la amplitud de la tensión y disminuye si aumentan R, L, u ω , aunque no proporcionalmente.

Es de hacer notar además, que la corriente está atrasada con respecto a la tensión un ángulo de entre 0 y 90°, según sea la relación entre ωL y R.

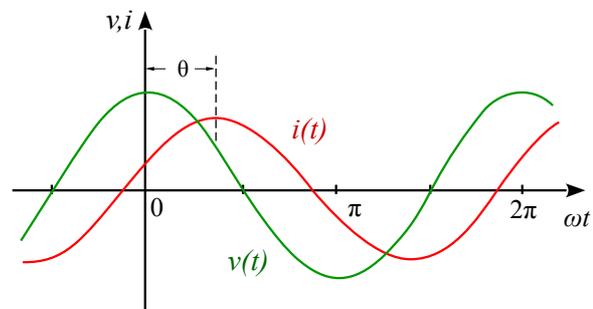


Fig. 24

Se llama a ωL la *reactancia*

inductiva del inductor, se mide en ohms y es una medida de la oposición que el inductor presenta al paso de una corriente senoidal.

El método que acabamos de utilizar es poco práctico para el análisis de los circuitos en general. En las próximas secciones veremos un método que permite simplificar mucho el análisis.

4.8 Número complejo

Para poder resolver ecuaciones que no tienen solución en el campo de los números reales, tales como $x^2 + 1 = 0$, en el siglo XVI se introdujo el símbolo $\sqrt{-1}$. Luego representado con la letra i , se lo consideró como un número ficticio que debía tratarse como cualquier número real, excepto que su cuadrado era -1 . Expresiones tales como $5 + 4i$ fueron llamadas *números complejos*.

A principios del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss y William Rowan Hamilton propusieron definir los números complejos como pares ordenados (a, b) de números reales dotados de ciertas propiedades especiales.

Definición: Sean a y $b \in \mathbb{R}$, el par (a, b) se llama número complejo si la igualdad, la adición y la multiplicación de pares se definen del siguiente modo:

- a) *Igualdad:* $(a, b) = (c, d)$ significa $a = c$ y $b = d$
- b) *Suma:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- c) *Producto:* $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

La definición de igualdad nos dice que el par (a, b) es un par *ordenado*. El primer componente, a , es la *parte real* del número complejo, el segundo componente, b , se llama *parte imaginaria*. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{A} = (a, b) \Rightarrow \Re[\mathbf{A}] = a \quad \Im[\mathbf{A}] = b$.

Propiedades¹: Sean $x, y, z \in \mathbb{C}$, las operaciones de adición y multiplicación de números complejos poseen las siguientes propiedades:

- Conmutativa:* $x + y = y + x, \quad xy = yx$
- Asociativa:* $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z$
- Distributiva:* $x(y + z) = xy + xz$

TM: Para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$ existe:

- Neutro:* $(a, b) + (0, 0) = (a, b), \quad (a, b)(1, 0) = (a, b)$
- Opuesto:* $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
- Recíproco:* Sí $(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow \exists (c, d) \in \mathbb{C}$ t.q. $(a, b)(c, d) = (1, 0)$ siendo:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow (a, b)^{-1} = \frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad \text{sí } (a, b) \neq (0, 0)$$

¹ El estudiante encontrará las demostraciones de los teoremas en Tom Apostol, Calculus, vol. 1, cap. 9

El conjunto de los números complejos satisface los seis axiomas del conjunto de los números reales y por consiguiente todas las leyes del Álgebra que se deducen de esos axiomas son válidas para ellos.

TM Cociente: Si (a,b) y $(c,d) \in \mathbb{C}$ siendo $(a,b) \neq (0,0)$, existe exactamente un número $(x,y) \in \mathbb{C}$ tal que $(a,b)(x,y) = (c,d)$, siendo $(x,y) = (c,d)(a,b)^{-1}$.

Los números complejos como una extensión de los números reales

Consideremos el subconjunto $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$ constituido por los números complejos de la forma $(a,0)$, o sea que tienen parte imaginaria nula. La suma o el producto de dos elementos de \mathbb{C}_0 también pertenece a \mathbb{C}_0 :

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0) \quad \text{y} \quad (a,0)(b,0) = (ab,0).$$

Los números complejos de \mathbb{C}_0 se comportan respecto a la suma, multiplicación, sustracción y división como si fueran reales. El sistema de los números complejos se considera como una extensión del de los números reales.

4.8.1 La unidad imaginaria j ¹

Al número complejo $(0,1)$ se lo representa con la letra j y se llama *unidad imaginaria*. Tiene la propiedad de que su cuadrado es -1 , $j^2 = -1$.

TM: Todo número complejo (a,b) puede expresarse en la forma $(a,b) = a + j b$

Dem.

$$\begin{aligned} \text{Por def. de producto de números complejos sabemos que: } & (b,0)(0,1) = (0,b) \\ \Rightarrow (a,b) = (a,0) + (0,b) & = (a,0) + (b,0)(0,1) \end{aligned}$$

Si escribimos $a = (a,0)$, $b = (b,0)$ y $j = (0,1)$ queda demostrado que $(a,b) = a + j b$

La ventaja de esta notación consiste en que facilita el manejo algebraico de las fórmulas en las que intervienen la suma y el producto.

Por ej.:

Cómo calcular el recíproco de un número complejo no nulo $a + j b$

$$\frac{1}{a + j b} = \frac{a - j b}{(a + j b)(a - j b)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{j b}{a^2 + b^2}$$

Lo cual coincide con el TM ya visto en el cual se trata la existencia del recíproco.

¹ En electrotecnia se usa la letra j , los matemáticos siguen usando la letra i

4.8.2 Interpretación geométrica

Puesto que un número complejo (x,y) es un par ordenado de números reales, se lo puede representar geoméricamente mediante un punto en el plano, o por un vector que una el origen con el punto (x,y) , como muestra la fig. 25. Por ello, al plano xy se lo llama a menudo plano complejo. El eje x es el eje real y el eje y es el eje imaginario. Ordinariamente las palabras *número*

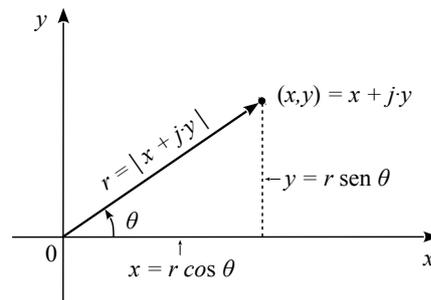


fig. 25

complejo y *punto* se usan indistintamente, así que diremos el punto z en lugar de decir el punto correspondiente al número complejo z . Es posible sumar y restar números complejos gráficamente mediante la *ley del paralelogramo*.

Si $(x,y) \neq (0,0)$, podemos expresar x e y en coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (33)$$

y obtenemos

$$x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

El número positivo r , que representa la distancia de (x,y) al origen, se llama *módulo* o *valor absoluto* de $x + jy$ y se representa con $|x + jy|$. Así tenemos

$$r = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (34)$$

El ángulo polar θ es *un argumento* de $x + jy$. Se dice que es *un* y no *el* argumento porque para un punto dado (x,y) , el mismo queda determinado por todos los ángulos de la forma $\theta + 2\pi \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello se suele restringir θ al intervalo $(-\pi, \pi]$ y a este θ restringido se lo llama *argumento principal* de $x + jy$, se escribe $\theta = \arg(x + jy)$. Haciendo el cociente de ambas

expresiones en la ec. (33) obtenemos la ec. (35):

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (35)$$

Al calcular θ utilizando (35), tenemos el problema de que

hay más de un valor posible para el ángulo. Se selecciona aquel ángulo para el cual el seno y el coseno tengan los signos apropiados para producir los valores requeridos de x e y en las ec. (33).

Al número complejo cero, le asignamos el módulo 0 y convenimos en que cualquier número real θ puede usarse como argumento.

El *complejo conjugado* de $z = x + jy$ es el número complejo $\bar{z} = x - jy$. Geométricamente, \bar{z} representa el simétrico de z respecto al eje real. La definición de conjugado implica que:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

4.8.3 Exponenciales complejas

Definición: Si $z = x + jy$, definimos e^z como el número complejo dado por la ecuación

$$e^z = e^x (\cos y + j \operatorname{sen} y) \quad (36)$$

Observaciones:

- i) Si $y = 0$ tenemos que $e^z = e^x$, o sea que esta exponencial coincide con la exponencial ordinaria cuando z es real.
- ii) Si $x = 0$ e $y = \theta$ obtenemos la fórmula de Euler: $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$ (37)
- iii) Si a y $b \in \mathbb{C}$, $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

TM: Todo número complejo $z \neq 0$ puede expresarse en la *forma exponencial*

$$z = r \cdot e^{j\theta}$$

en donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) + 2\pi \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Podemos también expresar un número complejo en la *forma polar*:

$$z = r \angle \theta$$

4.8.4 Potencias y raíces de números complejos

Si el número complejo está escrito en forma binómica, primero se lo deberá convertir a la forma polar.

Potencias

Sea un número complejo z escrito en la forma polar y un número $n \in \mathbb{Z}$

$$z = r \angle \theta = r (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

Para obtener la potencia del número complejo z se aplica la fórmula:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + j \operatorname{sen}(n\theta)] = r^n \angle n\theta$$

Raíces

Sea un número complejo z escrito en la forma polar y un número $n \in \mathbb{Z}$

$$z = r \angle \theta = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

Para obtener las raíces del número complejo z se aplica la fórmula:

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] = r^{1/n} \angle \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

donde k es un número entero que va desde 0 hasta $n - 1$, que al sustituirlo en la fórmula permite obtener las n raíces diferentes de z

Raíz cuadrada

En el caso particular en que $n = 2$, las dos raíces estarán representadas por vectores opuestos en el plano complejo y la fórmula quedará reducida a:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{r} \left[\cos \frac{\theta}{2} + j \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] = \sqrt{r} \angle \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + j \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] = \sqrt{r} \angle \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \end{cases}$$

4.8.5 Funciones complejas

Una función f cuyos valores son números complejos se denomina función compleja. Si el dominio de f es un conjunto de números reales, f se llama función compleja de variable real. Si el dominio es un conjunto de números complejos, f se llama función compleja de variable compleja.

Muchas de las funciones elementales del cálculo, entre ellas la función exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas pueden extenderse y convertirse en funciones de variable compleja.

Muchos de los teoremas del Cálculo diferencial y del integral son válidos también para las funciones complejas y haremos uso de ello en las próximas secciones.

Ejemplos

a) Calcular $(5 + j7) + (3 - j2) = 8 + j5$

b) Calcular $(1 - j2)(3 + j5) = 3 + j5 - j6 - 10j^2 = 13 - j$

c) Calcularemos en forma rectangular y polar $(1+j)/(1-j2)$

$$\frac{1+j}{1-j2} = \frac{1+j}{1-j2} \cdot \frac{1+j2}{1+j2} = \frac{1+j3+2j^2}{1-4j^2} = -\frac{1}{5} + j\frac{3}{5}$$

Es sencillo sumar y restar números complejos en forma rectangular, pero la multiplicación y la división son más trabajosas. Estas operaciones son más sencillas en las formas exponencial y polar. La forma polar es en realidad otra forma de notación para la forma exponencial, para multiplicar y dividir aplicaremos entonces las propiedades de la función exponencial: los módulos se multiplican o dividen y los argumentos se suman o restan.

Aplicando las ec. (34) y (35) transformamos primero ambos números a la forma polar y luego operamos:

$$\frac{1+j}{1-j2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2} \angle \tan^{-1} 1/1}{\sqrt{1^2+2^2} \angle \tan^{-1} -2/1} = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sqrt{5} \angle -63,43^\circ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \angle 108,43^\circ$$

Por supuesto, no es posible sumar o restar en las formas exponencial y polar.

Ejercicios

a) Expresar en la forma $a+jb$: $(1+j)^2$, $1/j$, $(2+j3)(3-j4)$, $(1/1+j)$

b) Calcular módulo y argumento principal de: $1+j$, $-j3$, $3+j4$, $2(1-j) + 3(2+j)$

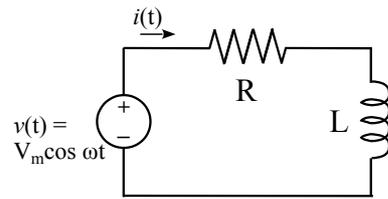
c) Ubicar en el plano complejo los números de los dos ejercicios anteriores.

d) Resolver gráficamente $(5 + j7) + (3 - j2)$

4.9 Análisis mediante fasores

Vamos a desarrollar un método¹ para representar una función de excitación senoidal por medio de un simbolismo con números complejos, llamado *transformación fasorial* o *fasor*. Éste no es más que un número que especifica la amplitud y el ángulo de fase de una señal senoidal. Al trabajar con fasores, en lugar de hacerlo con derivadas e integrales, se obtiene una simplificación notable en el análisis del estado senoidal permanente.

Como introducción analizaremos de nuevo el circuito RL de la fig. 23, pero siguiendo esta vez otro camino. Por comodidad, lo reproducimos aquí junto con su ecuación de malla.



Por el análisis hecho en 4.7, sabemos que si aplicamos una excitación senoidal $v(t) = V_m \cos \omega t$, obtendremos una corriente $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$.

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = V_m \cos(\omega t)$$

Debemos determinar los valores de I_m y θ . Aplicando la fórmula de Euler, podemos escribir $v(t)$ e $i(t)$ como la parte real \Re de una señal compleja:

$$v = V_m \cos(\omega t) = \Re[V_m e^{j\omega t}] \quad , \quad i = I_m \cos(\omega t + \theta) = \Re[I_m e^{j(\omega t + \theta)}]$$

Sustituimos ambos valores en la ecuación de malla y obtenemos:

$$L \frac{d}{dt} \Re[I_m e^{j(\omega t + \theta)}] + R \cdot \Re[I_m e^{j(\omega t + \theta)}] = \Re[V_m e^{j\omega t}]$$

Calculamos la derivada: $L \cdot \Re[j\omega I_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta}] + R \cdot \Re[I_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta}] = \Re[V_m e^{j\omega t}]$

$\Re[]$ y $e^{j\omega t}$ son comunes a todos los términos, así que reescribimos la ecuación en la forma:

$$\Re e^{j\omega t} [I_m e^{j\theta} (R + j\omega L) = V_m] \Rightarrow$$

Finalmente, suprimimos $\Re[]$ y $e^{j\omega t}$ y la reordenamos obteniendo:

$$I_m e^{j\theta} = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctan \frac{\omega L}{R}}$$

Aquí tenemos los valores de I_m y θ , los cuales nos permiten escribir la expresión de $i(t)$, ec. (38). La misma

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad , \quad \theta = - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

coincide con la ec.(32) que obtuvimos en el punto 4.7 :

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}) \quad (38)$$

¹ Propuesto en 1893 por Karl Steinmetz (1865 - 1923)

4.9.1 El fasor

Una tensión o corriente senoidal a una frecuencia dada se caracteriza únicamente por 2 parámetros: amplitud y ángulo de fase. La representación compleja de una tensión o corriente también se caracteriza por esos mismos dos parámetros. En estado senoidal permanente, a $I_m \cos(\omega t + \theta)$ le corresponde la representación compleja $I_m e^{j(\omega t + \theta)}$, una vez especificados I_m y θ , la corriente está determinada con exactitud. El factor $\Re e^{j\omega t}$ es superfluo, es más sencillo anotar la frecuencia por separado y no estar acarreándolo en todos los resultados. Por lo tanto, se pueden expresar tensión y corriente como V_m o $V_m e^{j0}$ e $I_m e^{j0}$.

Lo más común es hacerlo en forma polar:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \Rightarrow V_m \angle 0^\circ = \mathbf{V}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow I_m \angle \theta = \mathbf{I}$$

Esta representación compleja abreviada se llama *fasor*. El fasor es una cantidad compleja, no es una función instantánea del tiempo sino que sólo contiene información de amplitud y fase, se los representa con letras mayúsculas en negrita. Nos referimos a $i(t)$ como *la representación en el dominio del tiempo* y al fasor \mathbf{I} como *la representación en el dominio de la frecuencia*. El proceso de transformar $i(t)$ en \mathbf{I} se llama transformación fasorial del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Formalmente se procede como sigue:

- i) Dado $i(t)$, escribirla como una función coseno con un ángulo de fase
- ii) Expresar la onda coseno como la parte real de una cantidad compleja usando la fórmula de Euler.
- iii) Suprimir \Re
- iv) Suprimir $e^{j\omega t}$

En la práctica: $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \mathbf{V} = V_m \angle \varphi$

Por ej.: $v(t) = 100 \cos(\omega t - 30^\circ) \Rightarrow \mathbf{V} = 100 \angle -30^\circ$

Para regresar del dominio de la frecuencia al del tiempo, formalmente se debe efectuar el procedimiento inverso.

En la práctica: $\mathbf{V} = V_m \angle \varphi \Rightarrow v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

Por ej.: $\mathbf{V} = 115 \angle -45^\circ \Rightarrow v(t) = 115 \cos(\omega t - 45^\circ)$

4.9.2 Relaciones fasoriales en R, L y C

Vamos ahora a determinar la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial para cada uno de los tres elementos pasivos. Partiremos de sus ecuaciones de definición y escribiremos tensiones y corrientes en forma compleja, para luego suprimir $\Re[\]$ y $e^{j\omega t}$.

Resistor

La ecuación que lo define en el dominio del tiempo es: $v(t) = R \cdot i(t)$

Escribimos i y v en forma compleja: $\Rightarrow \Re[V_m e^{j(\omega t + \theta)}] = R \cdot \Re[I_m e^{j(\omega t + \phi)}]$

$$\Rightarrow \Re e^{j\omega t}[V_m e^{j\theta} = R \cdot I_m e^{j\phi}] \quad \Rightarrow \quad V_m e^{j\theta} = R \cdot I_m e^{j\phi}$$

R es un número real, es obvio que $\theta = \phi$, $\Rightarrow V_m \angle \theta = R \cdot I_m \angle \theta \Rightarrow \mathbf{V} = R \cdot \mathbf{I}$

Ej.: Sea $v(t) = 8 \cos(100t - 50^\circ)$ V y $R = 4\Omega$,

en el dominio del tiempo: $i(t) = v(t)/R = 2 \cos(100t - 50^\circ)$ A

en el dominio de la frecuencia: $\mathbf{I} = \mathbf{V}/R = 2 \angle -50^\circ$ A

Inductor

La ecuación que lo define en el dominio del tiempo es: $v(t) = L \frac{di}{dt}$

Escribimos i y v en forma compleja y luego derivamos

$$\Rightarrow \Re[V_m e^{j(\omega t + \theta)}] = L \frac{d}{dt} \Re[I_m e^{j(\omega t + \phi)}] \quad \Rightarrow \quad \Re e^{j\omega t}[V_m e^{j\theta} = j\omega L \cdot I_m e^{j\phi}] \Rightarrow$$

Obsérvese que el ángulo del factor $j\omega L$ es exactamente $+90^\circ$ y por lo tanto $V_m e^{j\theta} = j\omega L \cdot I_m e^{j\phi} \Rightarrow \mathbf{V} = j\omega L \cdot \mathbf{I}$

en un inductor \mathbf{I} debe estar *atrasada* 90° respecto a \mathbf{V} , como vimos en la ec. (8).

Ej.: Sea $\mathbf{V} = 8 \angle -50^\circ$ V, $L = 4$ H y $\omega = 100$ rad/s,

la corriente fasorial será: $\mathbf{I} = \mathbf{V}/j\omega L = 8 \angle -50^\circ / j100 \cdot 4 = 0,02 \angle -140^\circ$ A

en el dominio del tiempo: $i(t) = 0,02 \cos(100t - 140^\circ)$ A

Capacitor

La ecuación que lo define en el dominio del tiempo es: $i(t) = C \frac{dv}{dt}$

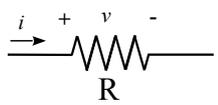
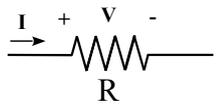
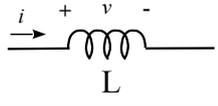
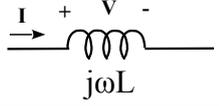
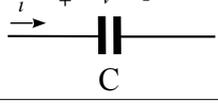
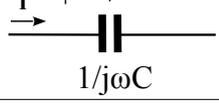
Procediendo como en el caso del inductor, obtendremos la

expresión $\Re e^{j\omega t}[I_m e^{j\phi} = j\omega C \cdot V_m e^{j\theta}] \Rightarrow \mathbf{I} = j\omega C \cdot \mathbf{V}$ y por lo tanto, en un capacitor \mathbf{I} debe estar *adelantada* 90° respecto a \mathbf{V} , tal como vimos en la ec. (16).

Ej. Sea $\mathbf{V} = 8 \angle -50^\circ \text{ V}$, $C = 4000\mu\text{F}$ y $\omega = 100 \text{ rad/s}$,

la corriente fasorial será: $\mathbf{I} = \mathbf{V} \cdot j\omega C = 8 \angle -50^\circ \cdot j100 \cdot 4 \times 10^{-3} = 3,2 \angle 40^\circ \text{ A}$

En la siguiente tabla resumimos la expresiones $v - i$ en el dominio del tiempo y $\mathbf{V} - \mathbf{I}$ en el dominio de la frecuencia. Todas las ecuaciones fasoriales son algebraicas y lineales. Las ecuaciones para inductancia y capacidad se asemejan a las de la ley de Ohm y de hecho se usarán de igual forma.

Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia	
	$v = R \cdot i$	$\mathbf{V} = R \cdot \mathbf{I}$	
	$v = L \frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L \cdot \mathbf{I}$	
	$v = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$	$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$	

Los fasores también obedecen las leyes de Kirchhoff.

Por ej. para las tensiones : $v_1 + v_2 + \dots + v_N = 0$ Usando la fórmula de Euler

sustituimos cada tensión: $\Re[V_{m1}e^{j(\omega t + \theta)} + V_{m2}e^{j(\omega t + \phi)} + \dots + V_{mN}e^{j(\omega t + \psi)}] = 0$

se suprime $\Re[] e^{j\omega t}$ en toda la ecuación y se obtiene: $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N = 0$

Resolveremos una vez más el circuito RL que reproducimos en la fig. 26, pero esta vez usando fasores. Por la ley de tensiones de Kirchhoff y las relaciones $\mathbf{V} - \mathbf{I}$ que acabamos de determinar:

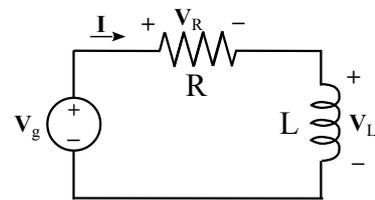


fig. 26

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_g \Rightarrow R \cdot \mathbf{I} + j\omega L \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}_g$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{R + j\omega L} \quad \begin{array}{l} \text{escogiendo un ángulo de fase de } 0^\circ \\ \text{para } \mathbf{V}_g, \text{ la escribimos en forma polar} \end{array} \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{V_g \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

Hemos llegado al mismo resultado que obtuvimos en la ec. (32), pero por un camino mucho más simple.

$$\Rightarrow \mathbf{I} = \frac{V_g}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

4.9.3 Impedancia

Si escribimos las relaciones tensión-corriente para los tres elementos pasivos en el dominio de la frecuencia como el cociente entre tensión fasorial y corriente fasorial

$$\frac{V}{I} = R \qquad \frac{V}{I} = j\omega L \qquad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

se ve que estas razones son funciones de los valores de los elementos y también de la frecuencia en los casos del inductor y del capacitor. Se las trata de la misma forma que a las resistencias, pero con la salvedad de que son cantidades complejas.

La **impedancia** se define como el cociente entre la tensión fasorial y la corriente fasorial y se la simboliza con la letra **Z**. La impedancia es una cantidad compleja cuya dimensión está dada en ohms. El número complejo que representa a la impedancia se puede expresar ya sea en forma polar o rectangular. Cuando se lo expresa en forma rectangular, la parte real es la *componente resistiva* o *resistencia* y la parte imaginaria es la *componente reactiva* o *reactancia*, la cual se simboliza con la letra X .

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta \quad , \quad \mathbf{Z} = R + jX$$

Como ejemplo, en la fig. 27 vemos la representación en el plano complejo de la impedancia del circuito de la fig. 26.

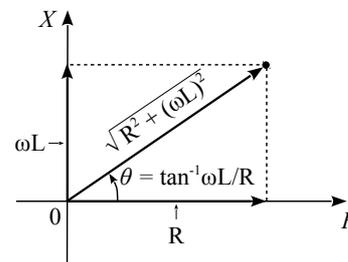


fig. 27

Las impedancias son parte del dominio de la frecuencia y no un concepto que forme parte del dominio del tiempo.

Como las leyes de Kirchhoff son válidas en el dominio de la frecuencia, se puede demostrar que las impedancias pueden conectarse en serie y en paralelo mediante las mismas reglas que se han estudiado para las resistencias.

Ej.: Si conectamos un resistor de 10Ω y una inductancia de 4mH y $\omega = 10^3 \text{ r/s}$ en serie:

$$jX_L = j10^3 \cdot 4\text{mH} = j4 \Omega$$

$$\mathbf{Z} = 10 + j4 \Omega = 10,77 \angle 21,8^\circ \Omega$$

En forma polar, una impedancia como $\mathbf{Z} = 10,77 \angle 21,8^\circ \Omega$ se dice que tiene un módulo o magnitud de $10,77 \Omega$ y un ángulo de fase de $21,8^\circ$.

en paralelo:
$$\mathbf{Z} = \frac{10 \cdot j4}{10 + j4} = 1,38 + j3,45 \Omega = 3,72 \angle 68,2^\circ \Omega$$

Observando ambos casos, vemos que la componente resistiva de la impedancia no es necesariamente igual a la resistencia del resistor presente en la red.

Ej.: Conectaremos en serie un resistor de 10Ω , una inductancia de 4mH y un capacitor de $1\mu\text{F}$ y calcularemos \mathbf{Z} para $\omega_A = 10^3 \text{ r/s}$ y $\omega_B = 10^5 \text{ r/s}$

para $\omega_A = 10^3 \text{ r/s}$: $jX_L = j10^3 \cdot 4\text{mH} = j4 \Omega$, $-jX_C = \frac{1}{j10^3 \cdot 10^{-6}} = -j1 \text{ k}\Omega$

$$\mathbf{Z} = 10 \Omega + j4 \Omega - j1 \text{ k}\Omega = 10 - j996 \Omega$$

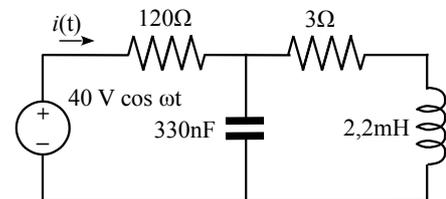
para $\omega_B = 10^5 \text{ r/s}$: $jX_L = j10^5 \cdot 4\text{mH} = j400 \Omega$, $-jX_C = \frac{1}{j10^5 \cdot 10^{-6}} = -j10 \Omega$

$$\mathbf{Z} = 10 \Omega + j400 \Omega - j10 \Omega = 10 + j390 \Omega$$

La reactancia de los inductores y capacitores es una función de la frecuencia, por lo que la misma sólo es válida para la frecuencia a la cual se calculó.

Ej.: Calcular $i(t)$ en el circuito de la figura para $f = 5 \text{ KHz}$

El circuito se muestra en el dominio del tiempo, pero para resolverlo pasaremos primero al dominio de la frecuencia.



$$jX_L = j2\pi \cdot 5 \times 10^3 \cdot 2,2 \times 10^{-3} = j69,12 \Omega$$

Calculamos las reactancias del inductor y del capacitor:

$$-jX_C = \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \times 10^3 \cdot 0,33 \times 10^{-6}} = -j96,46 \Omega$$

Y luego la impedancia equivalente \mathbf{Z}_{eq} presentada al generador:

$$\mathbf{Z}_{eq} = 120 + \frac{(3 + j69,12)(-j96,46)}{3 + j69,12 - j96,46} = 156,9 + j239,8 \Omega = 286,6 \angle 56,8^\circ \Omega$$

Calculamos la corriente fasorial:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40 \angle 0^\circ \text{ V}}{286,6 \angle 56,8^\circ \Omega} = 139,6 \angle -56,8^\circ \text{ mA}$$

Y volviendo al dominio del tiempo: $i(t) = 139,6 \cos(\omega t - 56,8^\circ) \text{ mA}$

4.9.4 Admitancia

La *admitancia* de un elemento de circuito se define como el cociente entre la corriente fasorial y la tensión fasorial, es el recíproco de la impedancia y se la simboliza con la letra **Y**.

$$Y = \frac{I}{V} \Rightarrow Y = \frac{1}{Z}$$

La parte real de la admitancia es la *conductancia* G y la parte imaginaria es la *susceptancia* B. Observe con cuidado la ec. (39), la misma *no* establece que la parte real de la admitancia sea igual al recíproco de la parte real de la impedancia, o que la parte imaginaria de la admitancia sea igual al recíproco de la parte imaginaria de la impedancia. Tanto la admitancia como la conductancia y la susceptancia se miden en mhos (o siemens).

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (39)$$

Ej.: Un resistor de 1Ω y un capacitor de 94 nF conectados en serie y siendo $f = 845 \text{ KHz}$, tendrán aprox. una impedancia $Z = 1 - j 2 \Omega$

La admitancia será entonces:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = 0,2 + j0,4 \text{ S}$$

Este valor de admitancia se puede obtener también conectando en paralelo una conductancia y una susceptancia, las cuales se pueden lograr mediante los elementos:

$$R = \frac{1}{G} = 5 \Omega \quad , \quad C = \frac{B}{j\omega} \approx 75 \text{ nF}$$

Estas son dos de las infinitas redes equivalentes de dos terminales que se pueden construir que tienen la misma impedancia y admitancia a esta misma frecuencia, siendo las únicas compuestas por sólo dos elementos.

4.9.5 Diagramas fasoriales

El *diagrama fasorial* es un bosquejo, en el plano complejo, que muestra las relaciones entre las tensiones y corrientes fasoriales en un circuito específico.

Como las tensiones y corrientes fasoriales son números complejos, también se las puede representar como puntos en el plano complejo.

En la fig. 28 hemos representado las tensiones fasoriales $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53,1^\circ \text{ V}$ y $\mathbf{V}_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53,1^\circ \text{ V}$. Mediante la regla del paralelogramo encontramos su suma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$.

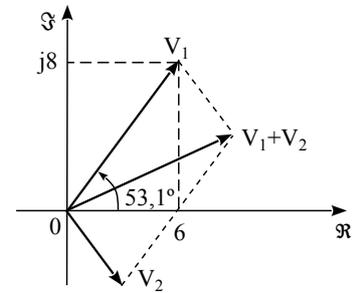


fig. 28

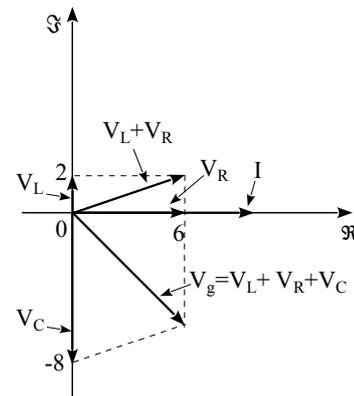
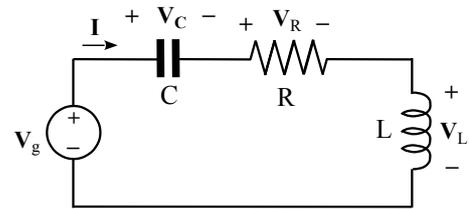
También se pueden representar fasores de tensión y corriente en un mismo plano complejo, cada uno de ellos tendrá su propia escala de amplitud pero una escala común para los ángulos.

Ej.: Vamos a construir el diagrama fasorial del circuito RLC de la figura.

Las tensiones que se han medido en los elementos del circuito son:

$$\mathbf{V}_C = 8 \text{ V}, \quad \mathbf{V}_R = 6 \text{ V}, \quad \mathbf{V}_L = 2 \text{ V}$$

Como todos los elementos son recorridos por la misma corriente, es más fácil construirlo tomando el fasor $\mathbf{I} = I \angle 0^\circ$ como referencia. La tensión \mathbf{V}_R está en fase con la corriente, en tanto que la corriente atrasa 90° respecto a \mathbf{V}_L y adelanta 90° respecto a \mathbf{V}_C . Luego de dibujar los fasores, podemos sumar las tensiones gráficamente.



4.9.6 Potencia

Potencia instantánea es la potencia entregada a cualquier dispositivo en función del tiempo y está dada por el producto de la tensión instantánea aplicada sobre el dispositivo y la corriente instantánea que lo atraviesa.

$$p = v \cdot i \quad (40)$$

Potencia promedio es el promedio de la potencia instantánea en un cierto intervalo de tiempo. Se la denota con una P mayúscula, ya que no es una función del tiempo.

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (41)$$

Nos interesa estudiar el caso de las redes con excitación senoidal permanente. Calcularemos la potencia promedio en un intervalo de duración T , donde T es el período de la señal de excitación.

Tendremos sobre el dispositivo en cuestión una tensión y una corriente:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \theta) \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

La potencia instantánea es: $p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cdot I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \varphi)$

aplicamos la identidad trigonométrica $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

y así obtenemos: $p(t) = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\theta - \varphi) + \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(2\omega t + \theta + \varphi) \quad (42)$

El 1^{er} término es una constante, por lo tanto es independiente de t y no necesitamos hallar su promedio, ya que es la constante misma. El 2^o término es una función coseno, por lo tanto $p(t)$ es periódica y su período es $T/2$. Como sabemos que el valor promedio de una onda seno o coseno en un tiempo igual a un número entero de períodos es 0, no necesitamos integrar formalmente la ecuación para saber que el promedio del 2^o término es 0.

La potencia promedio queda expresada entonces por la ec. (43), donde $\theta - \varphi$ es la diferencia de los ángulos de fase de $v(t)$ e $i(t)$

$$P = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\theta - \varphi) \quad (43)$$

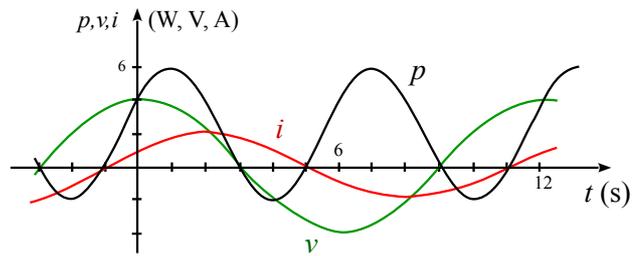
Ej.: Un generador $v = 4 \cos(\pi t/6)$ V se aplica a una impedancia $\mathbf{Z} = 2 \angle 60^\circ \Omega$

Hallar la potencia promedio en la carga y graficar $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{4 \angle 0^\circ \text{ V}}{2 \angle 60^\circ \Omega} = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$P = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

$$i(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ\right) \text{ A}$$



$$p(t) = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cos 60^\circ + \frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ\right) = 2 + 4 \cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ\right) \text{ W}$$

Potencia promedio en un resistor ideal

En este caso, la diferencia de fase entre $v(t)$ e $i(t)$ es 0° y por lo tanto:

$$P_R = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m = \frac{1}{2} I_m^2 \cdot R = \frac{V_m^2}{2R} \quad (44)$$

Potencia promedio entregada a un inductor o capacitor ideal

Como en ambos casos $\theta - \phi = 90^\circ$, la potencia *promedio* entregada será cero. En cambio, la potencia *instantánea* se hace cero sólo en instantes específicos. Por lo tanto, durante parte de cada ciclo fluye potencia hacia el inductor o capacitor y durante la otra parte del ciclo la potencia es devuelta sin pérdidas.

Inductores reales

Ya hemos dicho que los inductores reales presentan pérdidas debidas a la resistencia del alambre con que están contruidos, la cual representamos mediante una resistencia R en serie. El *factor de calidad* Q es una medida de la eficiencia con que se almacena la energía en el inductor cuando éste es recorrido por una corriente alterna senoidal y se lo define como:

$$Q = 2\pi \frac{\text{max. energía almacenada}}{\text{energía disipada/ciclo}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por la frecuencia:

$$Q = \omega \frac{\text{max. energía almacenada}}{P \text{ media disipada}}$$

La ec. (10) nos dice que la energía almacenada en un inductor en función del tiempo es

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2$$

Como su máximo valor coincide con el máximo valor de $i(t)$, que es I_m , la máxima energía almacenada es $\frac{1}{2} L \cdot I_m^2$, mientras que la potencia media es $P = \frac{1}{2} R \cdot I_m^2$

Si sustituimos estos valores en la ecuación de definición del Q y simplificamos, obtenemos la ec. (45)

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} \quad (45)$$

Es de hacer notar, que el circuito equivalente sencillo con un inductor ideal en serie con un resistor puro no es adecuado para alta frecuencia. La resistencia efectiva del alambre del inductor aumenta con la frecuencia a causa del *efecto pelicular*; el aumento de la frecuencia causa una redistribución de la corriente respecto del área transversal del conductor, haciendo que la corriente tienda a circular cerca de la superficie del mismo. Además, la distribución de corriente en el conductor también es afectada por la corriente que circula por los conductores próximos, *efecto de proximidad*, el cual reduce aún más la sección efectiva. Finalmente, existen capacidades distribuidas entre espira y espira y entre los extremos del inductor.

Capacitores reales

Es posible definir del mismo modo un factor de mérito para los capacitores.

Dependiendo de si las pérdidas se representan como una resistencia en serie o en paralelo, Q_C será:

$$Q_C = \frac{1}{\omega C_s R_s} \quad \text{o} \quad Q_C = \omega C_p R_p \quad (46)$$

En la práctica se reemplaza Q_C por su recíproco, el *factor de disipación*.

En alta frecuencia, la inductancia y la resistencia de los terminales de conexión pueden volverse significativas.

Valor eficaz

Hasta ahora hemos trabajado con valores instantáneos y máximos, pero nos interesa encontrar un valor que nos dé una medida de la efectividad de una fuente de tensión o corriente para entregar potencia a una carga resistiva.

El *valor eficaz* de una corriente periódica es igual al valor de la corriente continua que, fluyendo a través de un resistor de R ohms, entrega al resistor la misma potencia que la que le entrega la corriente periódica.

Obsérvese que esta definición es independiente de la forma de la onda periódica. Se definió mediante una onda de corriente, pero se puede definir también mediante una onda de tensión.

Para calcular este valor, partiremos de la ec. (41) tomando $t_1 = 0$ y $t_2 = T$,

siendo T el período de $i(t)$. Así, la potencia entregada al resistor por la corriente periódica es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt$$

La potencia entregada por la corriente continua es:

$$P = i_{ef}^2 \cdot R$$

Igualando ambas ecuaciones y despejando obtenemos la expresión de i_{ef} , ec. (47)

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (47)$$

Obsérvese que la operación a realizar es la raíz cuadrada de la media del cuadrado de la corriente periódica, por eso el valor eficaz también es llamado con el nombre de *raíz media cuadrática* o rms.

El caso que nos interesa es el de una onda senoidal $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, sustituyendo $i(t)$ en la ec.(47) y aplicando luego la identidad $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

tenemos que:

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) \right] dt}$$

La integral de la función coseno de frecuencia 2ω será 0, porque estamos integrando en un intervalo que abarca dos períodos completos y por lo tanto el área neta representada por la integral es 0.

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_{ef} &= I_m \sqrt{\frac{1}{2T} [t]_0^T + 0} \\ \Rightarrow i_{ef} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (48) \end{aligned}$$

El valor eficaz de una corriente o tensión senoidal es una cantidad real, independiente del ángulo de fase e igual al valor máximo o “de pico” dividido $\sqrt{2}$

La potencia promedio entregada a un resistor R escrita en valores eficaces de tensión o corriente es:

$$P = i_{ef}^2 \cdot R = \frac{V_{ef}^2}{R} \quad (49)$$

La ec. (43), que expresa la potencia promedio entregada a un dispositivo por una onda senoidal, también se puede escribir usando valores eficaces:

$$P = v_{ef} \cdot i_{ef} \cos(\theta - \varphi) \quad (50)$$

Los valores eficaces se representan por letras minúsculas no cursivas como v , i , a veces se agrega ef o rms. En estado senoidal permanente, las tensiones y corrientes fasoriales se pueden indicar en valor eficaz o valor de pico, la diferencia entre ambos es el factor $\sqrt{2}$. En general usaremos los valores eficaces.

Valor medio

El valor medio de una señal periódica es sinónimo de “componente de continua” de la misma y se calcula como:

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

En el caso de una señal simétrica, como es el caso de las señales senoidales, el área del semiciclo positivo es igual al área del negativo y el valor medio vale 0. Por eso, el valor medio de una señal senoidal se calcula sobre un semiciclo.

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt$$

Cambiamos de variable de t a $x = \omega t$, de donde $dt = dx/\omega$, siendo los nuevos límites de integración 0 y $\omega T/2 = \pi$

$$I_{av} = \frac{2}{T} \cdot \frac{I_m}{\omega} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{I_m}{\pi} (-\cos x)|_0^{\pi} \Rightarrow I_{av} = \frac{2I_m}{\pi}$$

Factor de forma

El *factor de forma* de una señal periódica se define como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio.

$$\text{Factor de forma} = \frac{i_{ef}}{I_{av}}$$

El Factor de forma de una corriente continua es 1, para una corriente senoidal es:

$$\text{Factor de forma} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 I_m / \pi} = 1,11$$

Potencia aparente y factor de potencia

Supongamos que se suministra a una carga una tensión $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ y que la corriente resultante es $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, siendo en consecuencia el ángulo $\theta - \varphi$ el ángulo de fase por el que la tensión adelanta a la corriente.

La potencia promedio entregada a la carga será $P = v_{ef} \cdot i_{ef} \cos(\theta - \varphi)$

Si la tensión aplicada y la corriente resultante fueran valores de continua, la potencia entregada hubiera sido el producto de tensión x corriente.

Si aplicamos este criterio al problema senoidal, obtenemos un valor $v_{ef} \times i_{ef}$ que *aparentemente* es la potencia absorbida. Este valor no es la potencia promedio, sino que se lo llama *potencia aparente* y se lo mide en *voltamperes* o VA.

Como $\cos(\theta - \varphi)$ a lo sumo puede valer 1, la magnitud de la potencia real nunca puede ser mayor que la potencia aparente.

El cociente de la potencia promedio o real entre la potencia aparente recibe el nombre de *factor de potencia*.

$$FP = \frac{\text{potencia promedio}}{\text{potencia aparente}} = \frac{P}{v_{ef} i_{ef}}$$

En el caso senoidal, $FP = \cos(\theta - \varphi)$, donde $\theta - \varphi$ es el ángulo por el que la tensión adelanta a la corriente. Por esta razón se dice con frecuencia que el ángulo $\theta - \varphi$ es el *ángulo del FP*.

Con una carga puramente resistiva, tensión y corriente están en fase y $FP = 1$. Con una carga puramente reactiva, la diferencia de fase entre tensión y corriente es de $\pm 90^\circ$, por lo que el FP será igual a cero.

Potencia compleja

Vamos ahora a expresar la potencia como una cantidad compleja. Dada la potencia promedio P absorbida por la carga, aplicaremos la fórmula de Euler:

$$P = v_{ef} \cdot i_{ef} \cos(\theta - \varphi) = v_{ef} \cdot i_{ef} \Re[e^{j(\theta - \varphi)}] = \Re[v_{ef} e^{j\theta} i_{ef} e^{-j\varphi}]$$

El primer par de factores entre los paréntesis rectos representan la tensión fasorial, pero el 2º par de factores no corresponde exactamente a la corriente fasorial $i_{ef} = i_{ef} e^{j\varphi}$ porque el ángulo incluye un signo de menos, sino que se trata del conjugado $\bar{i}_{ef} = i_{ef} e^{-j\varphi}$.

Podemos entonces expresar la potencia promedio como $P = \Re[v_{ef} \bar{i}_{ef}]$

Definimos ahora la *potencia compleja* \mathbf{S} como $\mathbf{S} = v_{ef} \bar{i}_{ef}$ (51)

Si observamos las formas polar o exponencial de la potencia compleja, es evidente que la magnitud de \mathbf{S} es la potencia aparente y el ángulo de \mathbf{S} es el ángulo del factor de potencia.

$$\mathbf{S} = v_{ef} \cdot i_{ef} e^{j(\theta - \varphi)}$$

Se pueden sacar más conclusiones interesantes expresando la potencia compleja en forma rectangular, donde P es la potencia promedio real. La parte imaginaria Q recibe el nombre de *potencia reactiva* y se mide en *voltamperes reactivos* o VAR. De la ec. (51) se desprende que la potencia reactiva es:

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (52)$$

$$Q = v_{ef} \cdot i_{ef} \sin(\theta - \varphi) \quad (53)$$

Podemos visualizar los componentes de la potencia compleja construyendo un diagrama fasorial que contenga v_{ef} e i_{ef} . Si descomponemos la corriente fasorial en dos componentes, una en fase con la tensión y otra 90° fuera de fase, queda claro que la potencia real está dada por el producto de la tensión fasorial y la componente de la corriente que está en fase con la misma, en tanto que la potencia reactiva es el producto de la tensión fasorial por la componente de la corriente que está 90° defasada (*en cuadratura*) con respecto a la tensión.

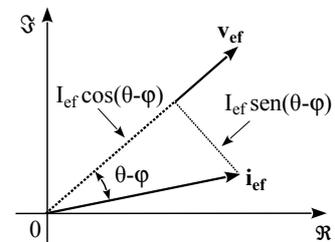
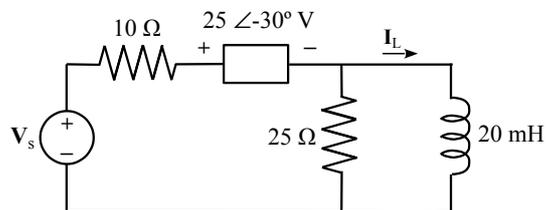


fig. 29

Problemas

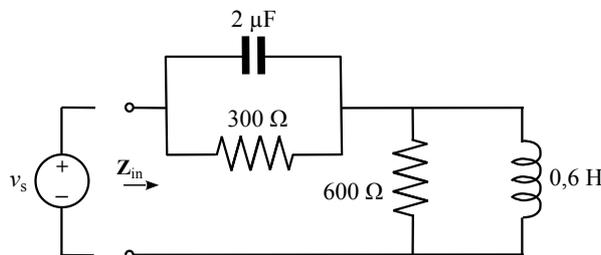
- 1) Determinar la impedancia y la admitancia en forma rectangular y polar para $f = 160\text{kHz}$ de:
- La combinación en paralelo de $R = 800\ \Omega$, $L = 1\ \text{mH}$ y $C = 2\text{nF}$
 - La combinación en serie de los 3 elementos del punto a)
 - Un capacitor de $20\ \mu\text{F}$ en serie con el paralelo de $R = 80\ \Omega$ y $L = 15\ \text{mH}$
- 2) En el circuito de la figura, si $f = 80\ \text{Hz}$ e $\mathbf{I}_L = 2,5 \angle 40^\circ\ \text{A}$, encontrar $v_s(t)$



- 3) a) Encuentre la impedancia \mathbf{Z}_{in} entre los terminales de entrada para

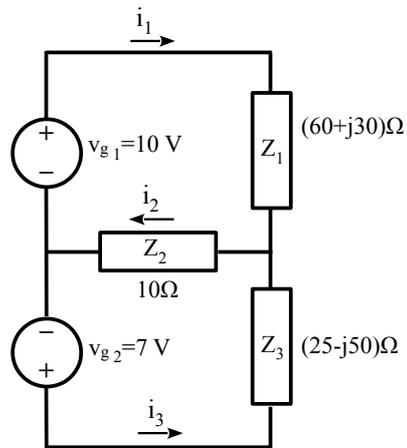
- $\omega = 800\ \text{rad/s}$;
- $\omega = 1600\ \text{rad/s}$

- b) Si se conecta el generador $v_s = 120 \cos 800 \cdot t\ \text{V}$, calcular la corriente que fluye hacia la derecha en la resistencia de $300\ \Omega$



- 4) Un inductor de $10\ \text{H}$, un resistor de $200\ \Omega$ y un capacitor C están en paralelo. a) Encuentre la impedancia de la combinación en paralelo con $\omega = 100\ \text{rad./s}$ si $C = 20\ \mu\text{F}$. b) Si la magnitud de la impedancia es $125\ \Omega$ con $\omega = 100\ \text{rad./s}$, encuentre C . c) ¿Cuáles son los dos valores de ω en donde la magnitud de la impedancia es igual a $100\ \Omega$ si $C = 20\ \mu\text{F}$.

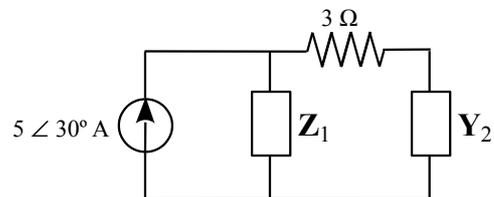
5) En el circuito de la figura, calcular las corrientes i_1 , i_2 e i_3 .



6) En el circuito de la figura, siendo $\mathbf{Z}_1 = 2 + j 5 \Omega$ e $\mathbf{Y}_2 = 0,1 - j 0,3 \text{ U}$ encuentre la potencia promedio

a) Disipada en el resistor de 3 ohms

b) Generada por la fuente



Bibliografía

Everitt y Anner, Ingeniería de Comunicaciones

Hayt y Kemmerly, Análisis de circuitos en ingeniería

M. Kuznetsov, Fundamentos de electrotecnia

E. Frank, Electrical Measurement Analysis

Tom Apostol, Calculus