1. Conceptos físicos preliminares

Ing. Juan C. Bonello, Ing. Pedro Castro

1.1 Fuerzas y cargas eléctricas

Consideraremos en este estudio un tipo de fuerzas denominadas electrostáticas.

Estas fuerzas son explicadas por cierta propiedad que poseen algunos cuerpos, la carga eléctrica. Así a nivel del núcleo del átomo el protón tiene carga, mientras que el neutrón no la tiene. Los electrones exteriores al núcleo también tienen carga eléctrica.

Tanto el protón como el electrón tienen la misma cantidad de carga, pero de signos contrarios. Al protón se le ha asignado carga positiva, mientras que al electrón se le atribuye carga negativa.

No existe carga menor a la del electrón, por lo que puede considerársela la unidad básica de carga eléctrica.

Sin embargo, en el sistema de unidades que usaremos en este curso, el sistema MKSA, la unidad de carga eléctrica se denomina Coulombio.

La carga del electrón medida en Coulombios resulta ser $1{,}602 \times 10^{-19}$.

Este valor fue determinado experimentalmente por Millikan hacia 1910.

Se ha comprobado que las fuerzas eléctricas son de dos tipos: de repulsión o de atracción. Cargas del mismo signo se repelen, mientras que cargas de signo contrario se atraen.

Aparte de estas fuerzas de repulsión y de atracción entre cargas, existen las fuerzas producidas por cargas con movimiento relativo entre ellas. Estas últimas se conocen como fuerzas magnéticas. En este cuaderno no trataremos las fuerzas magnéticas.

La separación entre fenómenos eléctricos y magnéticos se hace a fines de estudio, ya que éstos son inseparables.

1.2 Principio de conservación de la carga eléctrica

La Física ha conseguido estructurar su desarrollo en base a ciertos principios que son el resumen de la experiencia acumulada a través de la historia.

El principio de conservación de la carga es uno de ellos. Este principio expresa un hecho experimental. No se conoce ningún proceso en el cual se haya creado o destruido carga eléctrica, solamente se ha observado transferencia de carga entre cuerpos.

La carga eléctrica pues ni se crea ni se destruye, permanece constante. En Física, cuando una magnitud permanece constante se dice que se conserva.

Podemos inferir de esto que en un proceso de electrización, o sea un proceso en el cual un cuerpo se carga, otro cuerpo pierde esa misma cantidad de carga. De igual modo, cuando un cuerpo cargado se descarga, ha cedido su carga a otro cuerpo.

1.3 Fenómenos de electrización

Los átomos de cualquier sustancia tienen igual número de protones que de electrones. Por lo tanto los átomos son eléctricamente neutros.

Podemos concluir que en su estado natural todos los cuerpos tienen la misma cantidad de carga positiva que de carga negativa. Decimos que están sin carga neta, o simplemente sin carga o descargados.

Los primeros fenómenos eléctricos observados son los que se denominan de electrización por contacto.

Si se frota una varilla de vidrio con un trozo de seda, ambos cuerpos quedan electrizados. Dos varillas de vidrio electrizadas por rozamiento con un trozo de seda se repelen. Esto se explica diciendo que al rozar con la seda, ha habido una transferencia de carga que arbitrariamente consideraremos positiva, desde la seda a la varilla de vidrio. Se concluye que cargas del mismo signo se repelen.

Si se frota una varilla de caucho con lana o piel de gato, ésta resulta atraída por la varilla de vidrio electrizada. Esto se explica diciendo que la varilla de caucho se ha electrizado con cargas de signo negativo, y cuerpos cargados con signos contrarios se atraen.

Este convenio de signos es arbitrario y su origen es histórico, pero se sigue manteniendo.

1.4 Ley de Coulomb

Representaremos por **q** o **Q** la carga eléctrica.

La carga elemental, esto es la carga del electrón, se representa por la letra **e**.

El primer estudio cuantitativo sobre las fuerzas entre cuerpos cargados se debe a Augustin Coulomb, (1785).

Los experimentos de Coulomb pueden resumirse en su famosa ley: La fuerza entre dos cargas es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de la fuerza estará dada por la recta que une las dos cargas. El sentido de la fuerza estará determinado por el signo de las cargas.

En términos matemáticos:

$$(1) \qquad F := \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

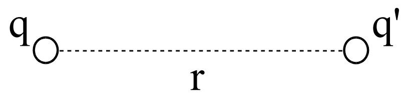


fig. 1

El símbolo := significa proporcional.

Sobre cada una de las cargas actúa una fuerza, siendo ambas iguales (fig. 1). Si las cargas son del mismo signo las fuerzas son de repulsión, si las cargas son de signo contrario las fuerzas son de atracción.

1.5 Sistema de unidades

La proporcionalidad (1) puede convertirse en una ecuación introduciendo una constante que designaremos **k** (ecuación 2):

$$(2) \qquad F = k \, \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

El valor de **k** depende del sistema de unidades y del medio en el cual están inmersas las cargas. Para el sistema MKSA y en el vacío k = 8,987 x 10^9. Las unidades de fuerza, carga y distancia en el sistema MKSA son el Coulombio, el Newton y el metro. Por lo tanto:

$$k = 8{,}987 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

1.6 Conductores y aisladores

Si se une una barra cargada con un hilo de cobre a un objeto metálico, se observará que se produce una descarga a través del hilo de cobre. O sea que eI hilo de cobre ha permitido el paso de la carga eléctrica a través de él. Si se repite la experiencia con un hilo de goma no se observará descarga apreciable.

Si hiciéramos esta experiencia con diversas sustancias, podríamos clasificarlas en dos tipos que denominaremos conductores y aisladores. Esta distinción, de fundamental importancia, será estudiada a fondo más adelante. Así a título de ejemplo, los metales son conductores de la electricidad, mientras que otras sustancias tales como el vidrio, goma o caucho son aislantes, o sea que no permiten apreciable pasaje de cargas eléctricas.

1.7 Campo eléctrico

Supóngase que se tiene una esfera cargada fija, suspendida por un cable aislante (fig. 2).

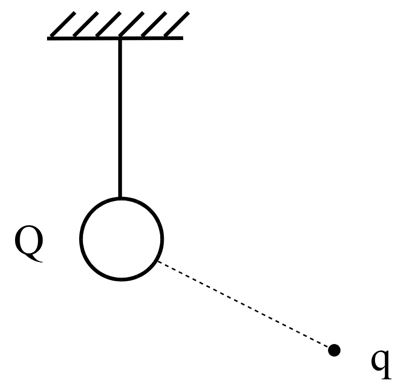


fig. 2

En cualquier punto vecino a la esfera cargada en que se introduzca una carga eléctrica, ésta experimentará una fuerza de origen eléctrico, que puede ser de repulsión o de atracción según los signos de la carga **Q** y de la carga **q**, que denominaremos carga exploradora.

Según la ley de Coulomb, tanto la carga fija como la carga exploradora sufrirán la acción de una fuerza dada por la ecuación 2. La fuerza sobre la carga exploradora **q** dependerá de su valor, del valor de **Q** y de la distancia entre los cuerpos cargados. Cuanto más alejada esté **q** de **Q**, menor será el valor de la fuerza. Como se ve, la ley de Coulomb proporciona un método para estudiar el comportamiento de los cuerpos cargados.

Vamos ahora a hacer otro enfoque del problema. En lugar de considerar que la carga **Q** repele o atrae a la carga **q**, consideramos que en esa región existe un campo eléctrico.

Consideramos, olvidando la carga **Q** en forma momentánea, que es el campo eléctrico que existe en esa región el que actúa sobre la carga exploradora. Podemos definir pues: Existe un campo eléctrico en un punto del espacio si sobre una carga de prueba colocada en ese punto actúa una fuerza de origen eléctrico, o sea una fuerza que no se manifiesta si se descarga al cuerpo explorador.

El planteo del problema desde el punto de vista del concepto de campo no debe hacernos olvidar que el origen del campo es otro u otros cuerpos cargados. Más técnicamente decimos que las fuentes de todo campo eléctrico son distribuciones de cargas eléctricas.

1.8 Intensidad, dirección y sentido del campo eléctrico

Se representa al campo eléctrico por la letra E. Es una magnitud vectorial, o sea que tiene intensidad, dirección y sentido. La intensidad se determina mediante el cociente entre el valor de la fuerza sobre una carga exploradora pequeña y el valor de esa carga. O sea:

$$E = \frac{F}{q} \qquad (3)$$

De acuerdo con la ecuación anterior, las dimensiones del campo eléctrico son de fuerza/carga, o sea que su unidad será el Newton/Coulombio, sin nombre especial.

El campo eléctrico es una magnitud vectorial. Además de su intensidad se le atribuye dirección y sentido. La dirección y sentido del campo eléctrico en un punto es la dirección y sentido de la fuerza que actuaría sobre una carga de prueba positiva colocada para explorar el campo en ese punto. Esta definición es arbitraria en cuanto al signo de la carga exploradora, podría haberse tomado negativa. Así por ejemplo en la figura 3 se ve la dirección y el sentido del campo representado por una flecha.

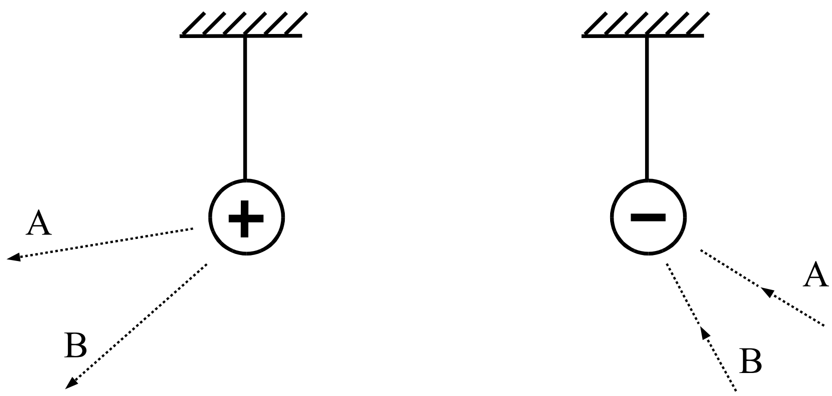


fig. 3a fig. 3b

Una carga de prueba positiva colocada en los puntos A o B sería repelida por la carga fija **Q**. Si **Q** fuera negativa, como en la figura 3b, la fuerza sería de atracción, y así lo indica la punta de la flecha.

La ecuación 3 puede escribirse de otra manera:

$$(4) \qquad F = q \cdot E$$

Esta última ecuación permite calcular la fuerza sobre una carga conocida **q** si se conoce el valor del campo **E** en ese punto.

1.9 Cálculo de la intensidad del campo eléctrico

En ciertos casos calcularemos el valor del campo aplicando la ley de Coulomb. Supóngase que se quiere calcular el campo eléctrico en un punto A (fig. 3) distante **s** de una carga fija Q, creadora del campo en esa región. Si se coloca una carga exploradora **q** pequeña, sobre ella actuara una fuerza dada por la ley de Coulomb:

$$(5) \qquad F = k\,\frac{q \cdot Q}{s^2} \qquad (\mathit{Newtons})$$

Dividiendo esta última ecuación por el valor de la carga exploradora **q** se tiene **E**:

$$(6) \qquad E = \frac{F}{q} = k\,\frac{Q}{s^2} \qquad (\mathit{Newtons/Coulombios})$$

Ahora queda claro que el valor del campo no depende de la carga de prueba, lo cual haría la definición de la intensidad del campo inútil.

1.10 Campo creado por una distribución de cargas fijas

Para calcular el campo eléctrico en un punto debido a una distribución cualquiera de cargas fijas, haremos uso de un principio de fundamental importancia. Este principio lo denominaremos de superposición y lo expondremos a continuación.

Calcularemos en ese punto cada una de las contribuciones al campo debida a cada una de las cargas y luego haremos la suma de todas ellas. Cuando se calcula la contribución de cada carga, se supone que las demás no existen. Debido a la naturaleza vectorial del campo eléctrico, la suma de las contribuciones será una suma vectorial. Para ilustrar esto, en la figura 4 tenemos dos cargas fijas y se quiere calcular el campo en un punto cualquiera como el punto A.

El vector E_1 representa el campo creado en A por la carga Q_l, como si la carga Q_2 no existiera. El valor de E_1 se calcula de acuerdo con la fórmula 6, o sea E_1 será proporcional al valor de Q_1, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde A a la posición de Q_1, o sea s_1. A su vez E_2 representa el campo creado en el punto A por la carga Q_2. Realizando la suma vectorial de E_1 y E_2 se tiene el campo resultante en A, lo cual aparece como E_t en la figura 4. Debe notarse que al calcular E_1 no se tuvo en cuenta la acción de Q_2 y al calcular E_2 no se tomó en cuenta a Q_1.

Esto constituye la esencia del principio de superposición.

Si hubieran más cargas, el método se puede extender a cualquier número de cargas. Simplemente habrá tantos vectores a sumar como cargas fuentes del campo eléctrico haya.

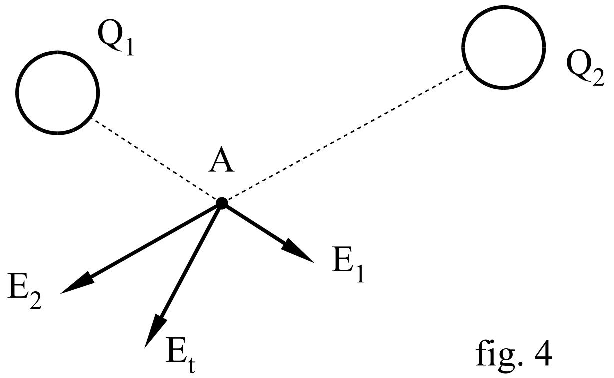


fig. 4

1.11 Representación de un campo eléctrico mediante líneas de fuerza

Tanto el campo eléctrico como el campo magnético pueden ser representados por medio de las líneas de fuerza. Una línea de fuerza es una línea dibujada de tal modo que, si se quiere saber la dirección y sentido del campo en un punto, basta con trazar una recta tangente a la curva en ese punto (fig. 5).

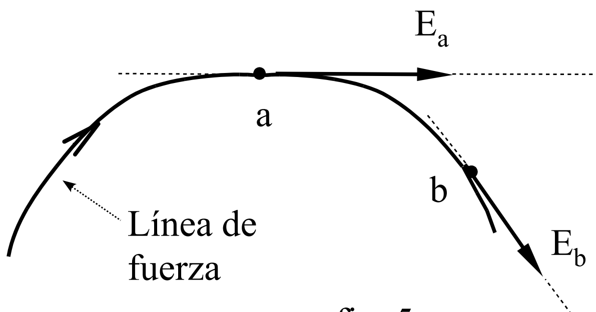


fig. 5

La dirección de la tangente marca la dirección del campo en ese punto. El sentido queda determinado por una flecha superpuesta a la línea de fuerza. Toda línea de fuerza se origina en una carga positiva y termina en una carga negativa, y la flecha apunta en la dirección de la carga positiva hacia la negativa.

Las líneas de fuerza también permiten tener una idea de la intensidad del campo. Para ello son dibujadas de modo que el número de líneas que atraviesa una superficie unitaria sea proporcional a la intensidad del campo.

Las líneas de fuerza del campo eléctrico tienen dos características remarcables. En primer lugar son lineas abiertas, o sea que no cierran sobre sí mismas.

En segundo lugar, las líneas de fuerza del campo eléctrico se pueden apretar donde el campo es muy intenso, pero nunca se cruzan. En esta página se pueden ver las líneas de fuerza para algunas distribuciones de cargas.

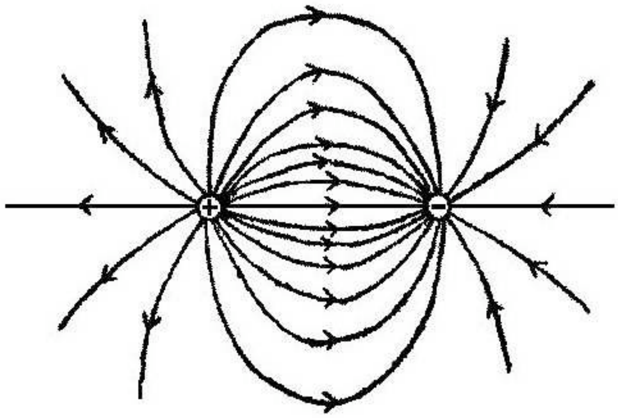


fig. 6 a

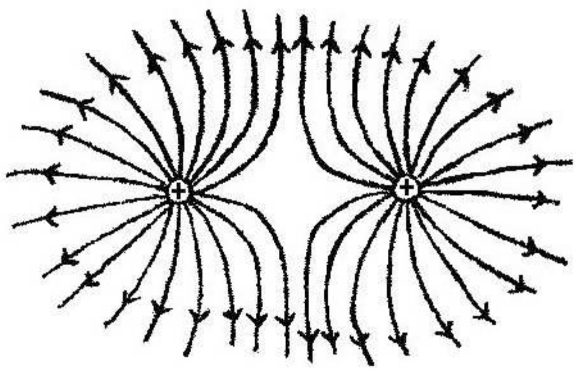


fig. 6 b

En la figura 6 podemos ver la representación de un campo eléctrico mediante líneas de fuerza. En la fig. 6 a, vemos el campo entre dos cargas iguales de signo contrario. En la fig.6 b, para dos cargas iguales del mismo signo.

1.12 Potencial eléctrico

Antes de definir el potencial, recordaremos la definición de trabajo.

Se dice que una fuerza hace trabajo cuando se desplaza su punto de aplicación.

Si la fuerza es constante, el trabajo se calcula mediante el producto del valor de la fuerza, por el desplazamiento y por el coseno del ángulo comprendido entre los vectores fuerza y desplazamiento.

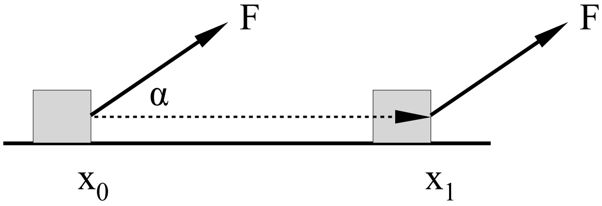


fig. 7

Así en la figura 7 se ve un cuerpo sobre el que actúa una fuerza constante F, desplazándose el punto de aplicación de F desde una posición x_0 hasta una posición x_1. Al vector desplazamiento lo designaremos por $\Delta x = x_1 - x_0$, y lo representaremos por un vector con origen en el punto x_0 y extremo en el punto x_1. Lo expresado anteriormente puede ser formulado así:

$$(7) \qquad T = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$$

La unidad de trabajo en el sistema MKSA será el Newton x metro, que recibe el nombre de Julio, en honor del físico inglés James Joule.

Conviene aclarar que la fuerza F no tiene por que ser la única fuerza actuante sobre el cuerpo. Téngase en cuenta que se calcula el trabajo de una fuerza.

No debe ser confundido el trabajo definido como anteriormente se hizo con el significado de la palabra trabajo en el lenguaje común. Así, transportar un objeto realizando una fuerza perpendicular al recorrido implica indudablemente en el lenguaje común realizar un trabajo. Sin embargo, según la definición anterior no, ya que por ser el ángulo entre los vectores F y Δx de 90°, el coseno vale cero, siendo nulo el trabajo.

En el curso de Física, el estudiante verá que si una fuerza realiza un trabajo sobre un cuerpo, se incrementa alguna forma de energía del cuerpo. Así, por ejemplo, puede incrementarse la energía cinética del cuerpo, o alguna forma de energía potencial.

Así, el resultado de la acción de la fuerza sobre el cuerpo puede ser, que estando inicialmente en reposo adquiera una cierta velocidad, aumentando entonces su energía cinética en una cantidad $m \cdot v^2/2$, donde **m** es la masa del cuerpo y **v** el valor de su velocidad.

En virtud del Principio de conservación de la energía, otro u otros cuerpos deben haber cedido esa cantidad de energía. Es importante que el estudiante preste atención sobre este modo de pensar. El principio de conservación de la energía, que junto con el de conservación de la carga son los pilares básicos del electromagnetismo, es la expresión sintética de la experiencia acumulada a través de la Historia en el sentido de que no se ha comprobado la existencia de ningún proceso en el que se cree o destruya energía. Decimos pues que la energía se conserva.

Esto no significa que a veces no resulte fácil realizar el balance energético. Aclararemos esto mediante un ejemplo:

En la figura 8 se ve a una persona que eleva un cuerpo **A** a una cierta altura **h** del nivel del suelo. Para ello se vale de una cuerda y de una polea. A fin se simplificar el problema, supondremos que se ha eliminado todo tipo de rozamiento.

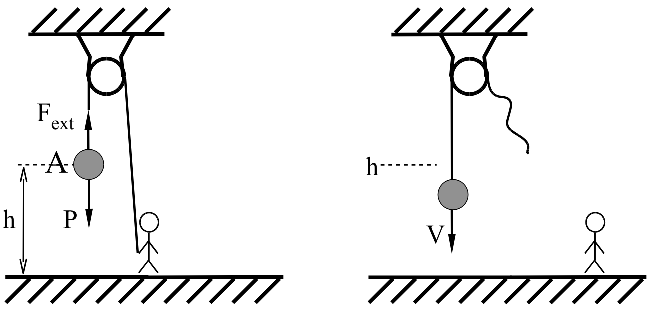


fig. 8

Las únicas fuerzas actuantes son el peso del cuerpo y la fuerza exterior que hace el hombre. Durante el proceso de elevación, la fuerza exterior realiza un trabajo que de acuerdo a la formula 7 será igual a

$$(8) \qquad T = F_{ext} \cdot h$$

Si no hay rozamiento alguno y no se necesita energía para hacer rotar la polea, podemos suponer que para elevar el cuerpo basta con que la fuerza exterior sea igual al peso **P** del cuerpo. Pero como $P = m \cdot g$, siendo **m** la masa del cuerpo **A** y **g** la aceleración de la gravedad, sustituyendo en la ecuación 8:

$$(9) \qquad T = -\, m \cdot g \cdot h$$

El signo negativo en la ecuación anterior se entiende, pues la fuerza gravitatoria tiene sentido contrario a la fuerza exterior.

¿En que se ha invertido ese trabajo? Una manera de comprobar que esa energía del trabajo realizado no se ha destruido, o desaparecido, es suponer que se suelta la cuerda. El cuerpo, inicialmente en reposo a una altura **h**, adquirirá una velocidad **v** hasta llegar al nivel del suelo.

Se introduce pues el concepto de energía potencial gravitatoria. Decimos que el trabajo de la fuerza exterior incrementó la energía potencial gravitatoria del cuerpo **A**. Más precisamente, lo incrementó en una magnitud igual al trabajo de la fuerza exterior, o sea: $m \cdot g \cdot h$

Cuando el cuerpo estaba a una altura **h**, tenía una propiedad que no tiene si se encuentra al nivel del suelo. La propiedad se denomina energía potencial gravitatoria. Si se duda de la existencia de esa propiedad, piénsese en que estando el cuerpo arriba puede descender y adquirir energía cinética, mientras que por sí solo no puede hacer el proceso inverso (o sea, estando en el suelo subir y aumentar su velocidad sin intervención de algún agente exterior).

Pasemos ahora al concepto de energía potencial eléctrica.

En la figura 9 se ve un cuerpo con cierta carga **Q** (negativa) suspendido mediante un hilo aislante. Una persona mueve una esferita cargada positivamente mediante una varilla aislante desde el punto **a** hasta el punto **b**. Evidentemente, este desplazamiento se realiza contra la fuerza de atracción que ejerce la carga fija **Q** sobre la carga móvil. (Supondremos que la fuerza gravitatoria es despreciable frente a la fuerza coulombiana). La fuerza exterior la provee la persona que empuja la varilla desde **a** hasta **b**. El trabajo que realiza será igual a esa fuerza por el desplazamiento, o sea la distancia desde **a** hasta **b** y multiplicada por el coseno del ángulo correspondiente (ec. 7).

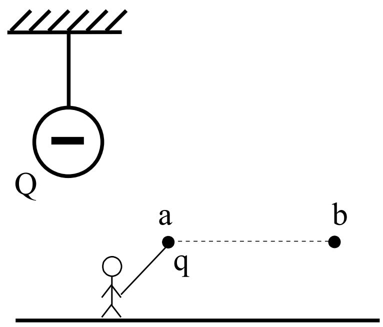


fig. 9

Esa energía exterior: ¿En que se gastó? Decimos que se invirtió en incrementar la energía potencial eléctrica de la carga móvil.

¿Cómo justificamos que esa energía está en forma potencial? Si liberamos la esferita cargada de la varilla, la fuerza atractiva de la carga negativa **Q** la llevará desde **b** hacia el punto **a**, realizándose el mismo trabajo, solo que con el desplazamiento en sentido contrario.

La energía potencial eléctrica que tenía la carga móvil en el punto **b** disminuye transformándose en energía de movimiento, o sea en energía cinética.

El estudiante debe notar el paralelismo del ejemplo eléctrico con el ejemplo mecánico anterior.

Pasemos ahora a una definición más precisa. Definimos el potencial eléctrico de un punto como el trabajo realizado por unidad de carga para traer una carga desde un punto infinitamente alejado hasta ese punto, venciendo la oposición del campo eléctrico. O sea que en la figura 9, el potencial del punto **a** sería igual al trabajo que habría que hacer para traer una carga unitaria negativa desde un punto infinitamente alejado hacia la derecha hasta el punto **a**.

El potencial eléctrico depende pues de la posición.

Designaremos al potencial eléctrico con la letra V y un subíndice que indica el punto de que se trata. Así el potencial del punto **a** se escribe $\mathbf{V_a}$, el potencial del punto **b** será $\mathbf{V_b}$, etc.

De acuerdo con la definición anterior, las dimensiones del potencial eléctrico son de trabajo o energía sobre carga. Su unidad en el sistema usual de unidades es el Julio/Coulombio, que recibe en honor del físico italiano Alejandro Volta el nombre de voltio.

1.13 Diferencia de potencial

La diferencia de potencial entre dos puntos **a** y **b** se denota simplemente como V_a - V_b o abreviadamente V_{ab}. La diferencia de potencial entre dos puntos es simplemente la diferencia de los potenciales de cada punto. Así supongamos que el potencial de un punto **c** sea 8 voltios. Esto se escribe así: V_c = 8 V. A su vez consideremos que el potencial de otro punto **d** sea de 5 voltios (V_d = 5 V.). Entonces la diferencia de potencial entre los puntos **c** y **d**, o sea V_{cd} será:

$$V_{cd} = V_c - V_d = 8 - 5 = 3\,V$$

Es común llamar a la diferencia de potencial tensión y en lenguaje no muy académico, pero muy usado, voltaje.

Estableceremos a continuación, sin demostración, lo siguiente que es de fundamental importancia:

La diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo que debe efectuarse contra las fuerzas del campo eléctrico para trasladar una carga unitaria entre esos dos puntos.

Así en el ejemplo anterior, que la diferencia de potencial entre los puntos **c** y **d** sea de 3 voltios, significa que para trasladar un coulombio desde **d** hasta **c** hay que realizar un trabajo de 3 julios. Nótese que decimos desde **d** hasta **c**, en el sentido inverso no hay que realizar trabajo. En ese caso el trabajo lo proporciona la energía potencial eléctrica.

Estableceremos ahora una conclusión importante.

Sí una carga remonta una subida de potencial, o sea va desde un punto de potencial inferior a otro superior, consume energía de alguna fuente exterior. A expensas de esa energía exterior aumenta su energía potencial eléctrica. Por el contrario, si una carga "desliza" por una bajada de potencial, hay una transformación de la energía potencial eléctrica en alguna otra forma de energía, como ser energía cinética o calor.

1.14 Fuerza electromotriz

En el estudio posterior de los circuitos eléctricos, el estudiante se manejará con elementos denominados generadores. Su estudio se efectuará más adelante, pero por ahora diremos que un generador es un elemento capaz de entregar energía eléctrica. Por supuesto que esa entrega se basa en la conversión de energía de alguna forma no eléctrica a alguna forma eléctrica.

Pasemos ahora al concepto de fuerza electromotriz. El valor de la fuerza electromotriz (fem) de un generador es la cantidad de energía que convierte por unidad de carga que circula.

De acuerdo con esta definición, las dimensiones de la fem serán de energía/carga y su unidad será el voltio.

Aclaremos la definición mediante un ejemplo concreto.

Supongamos que una pila tiene una fem de 1,5 voltios. Esto quiere decir que por cada coulombio de carga que entrega la pila, ésta convertirá 1,5 julios de energía no eléctrica en energía eléctrica.

La definición anterior se puede expresar matemáticamente como:

$$(10) \qquad \text{fem} = \frac{\text{energía convertida}}{\text{carga}}$$

1.15 Corriente eléctrica

Como ya mencionamos anteriormente, hay elementos que son conductores de la electricidad. Denominaremos corriente eléctrica a un movimiento de cargas ordenado. Denominaremos conductor a un medio en el cual se propaga una corriente eléctrica.

Clasificaremos las corrientes en transitorias cuando en un lapso breve de tiempo se extinguen. Si no sucede así, se dice que la corriente es estacionaria.

Una corriente se dice que es continua si fluye siempre en el mismo sentido. Decimos que es alternada o alterna cuando invierte periódicamente su sentido.

Una corriente es constante cuando no varía su magnitud ni su sentido en el tiempo. Una corriente es variable si varía su sentido o su magnitud a medida que transcurre el tiempo.

¿Cómo se cuantifica una corriente eléctrica?

Mediante el valor de su intensidad. La intensidad de una corriente se define como la cantidad de carga que atraviesa una sección dada de un conductor por unidad de tiempo.

Designaremos por I a la intensidad de la corriente.

Si en un intervalo Δ_t pasa por la sección sombreada de la figura 10 una cantidad de carga Δ_q, de acuerdo a la definición:

$$I = \frac{\Delta_q}{\Delta_t} \tag{11}$$

Por la ecuación 11, las dimensiones de la intensidad son carga/tiempo. O sea que su unidad será el coulombio/segundo, que se denomina amperio, en honor del físico francés A. M. Ampere. Debido a que las cargas móviles que conforman una corriente eléctrica pueden ser positivas o negativas, es preciso definir un sentido de la corriente.

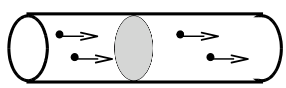


fig. 10

Se toma arbitrariamente como sentido de la corriente el sentido del movimiento de las cargas positivas.

Es de hacer notar que en los conductores metálicos las cargas móviles son electrones, por lo tanto negativas. De acuerdo con la convención anterior, el sentido de la corriente en un conductor metálico es el contrario al del movimiento de los portadores de carga.

2. Leyes fundamentales

Ing. Juan C. Bonello, Ing. Pedro Castro

2.1 Método de análisis de dispositivos de dos terminales

Se presenta aquí un método de análisis para dispositivos de dos terminales sometidos a régimen constante, o sea que las tensiones y corrientes permanecerán invariables en el tiempo.

Estos dispositivos pueden tener una estructura interna compleja, pero estudiaremos únicamente las propiedades que puedan deducirse de las mediciones hechas desde los dos terminales en consideración, de ahí el nombre que adoptaremos para ellos: Dispositivos de dos terminales.

Cabe señalar aquí, que la corriente entrante al dispositivo por un terminal debe ser igual a la corriente saliente por el otro. De lo contrario existirán más terminales en el dispositivo (fig. 1).

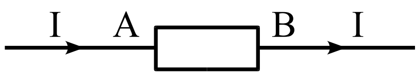


figura 1

Esto quiere decir, que dentro del dispositivo no se pierde ni se genera carga alguna. Se considera que la corriente atraviesa el dispositivo de un terminal a otro.

2.2 Dispositivos lineales

Nos ocuparemos ahora de aquellos dispositivos que presentan como relación tensión-corriente una línea recta que pasa por el origen. Los llamaremos dispositivos lineales. En la figura 2 se ve la gráfica de un dispositivo lineal.

Veamos como fue trazada. Se asignó al eje horizontal (abscisas) la intensidad de corriente y al eje vertical (ordenadas) los valores de la tensión en los terminales del dispositivo.

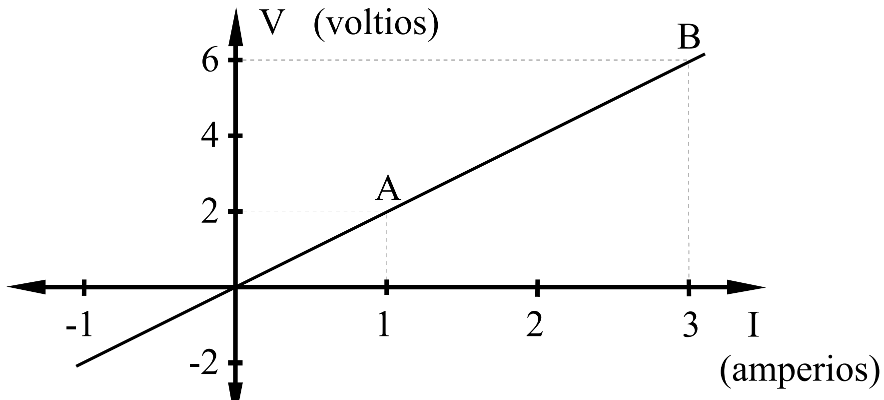


figura 2

Los valores negativos y positivos de la corriente corresponden a diferentes sentidos de circulación, lo que da lugar a un cambio de signo en la diferencia de potencial.

Consideremos el punto **A** de la gráfica. Cuando la medición de la corriente resultó ser 1 amperio, la medición de la diferencia de potencial en los terminales del dispositivo fue de 2 voltios.

Consideremos ahora el punto **B**. En este caso las medidas fueron de 6 voltios y 3 amperios.

Bajo este procedimiento se obtuvieron suficientes puntos como para trazar la gráfica completa.

Puede observarse en la gráfica, que a cada valor de corriente le corresponde un único valor de tensión. Se dice que la diferencia de potencial depende o "es función" de la corriente.

Como el estudiante ya habrá observado, para obtener el valor de tensión a partir de un valor de corriente dado, no es necesario usar la gráfica; es suficiente multiplicar el valor de la corriente por un número, en este caso el número es 2.

Este número dependerá del dispositivo en cuestión y se dice que este número es una constante del dispositivo. Le llamaremos a esta constante *resistencia* y la representaremos por la letra **R**.

Para hallar el valor de la tensión en los terminales de un dispositivo de esta naturaleza bastará con hacer:

$$(1) \qquad V = R \cdot I$$

Llamaremos resistencia eléctrica al cociente entre la diferencia de potencial y la corriente en un dispositivo lineal.

$$(2) \qquad R = \frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia eléctrica es el voltio/amperio, que recibe el nombre de Ohmio (Ω) en honor al físico alemán Georg Ohm.

2.3 Ley de Ohm

Hemos visto que en un dispositivo lineal de dos terminales, la corriente es directamente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia.

La ley de Ohm establece en su enunciado que *en un conductor metálico la corriente es proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia del conductor.*

De acuerdo con lo antedicho, los elementos que cumplen la ley de Ohm son dispositivos lineales.

Es útil definir la relación corriente/tensión, inversa de la resistencia, que recibe el nombre de conductancia y que representaremos por la letra **G**. De acuerdo con la ecuación 2:

$$(3) \qquad G = \frac{I}{V} \qquad\qquad (4) \qquad G = \frac{1}{R}$$

La unidad de conductancia, amperio/voltio es el mho (℧).

Es importante recalcar que la resistencia y la conductancia son dos formas de expresar la misma propiedad.

Es decir, si un elemento tiene una resistencia de 2 ohmios, es equivalente a decir que tiene una conductancia de 0,5 mhos.

Se representa a la resistencia o conductancia por el símbolo de la figura 3.

Se acompaña este símbolo por el valor numérico y la unidad correspondiente. El mismo símbolo se utiliza para la conductancia.

figura 3

Ejercicios

1) En un elemento lineal de dos terminales, la tensión entre sus bornes es 10 V. cuando la intensidad de la corriente es de 0,5 A.

Determinar: a) la corriente si la d.d.p. es 20 V.

b) la tensión si la corriente es 0,2 A.

c) el valor de la conductancia.

2) En un elemento de dos terminales se hicieron las siguientes parejas de mediciones de tensión y corriente: V = 1,57 V. I = 0,5 A. ;

V = 4,7 V. I = 1,5 A. ; V = 7,85 V. I = 2,5 A.

Trazar la gráfica y determinar si el dispositivo es lineal.

Calcular el valor de R si el dispositivo es lineal.

3) Repetir el problema anterior para las siguientes parejas de mediciones:

V = 40 V. I = 0,7 A. ; V = 50 V. I = 1,09 A. ; V = 70 V. I = 2,13 A. ;

V = 90 V. I = 3,52 A.

2.4 Resistividad

Consideremos un alambre de constitución homogénea y sección constante. Se puede comprobar que la resistencia que presenta entre sus extremos es proporcional a su longitud, inversamente proporcional a su sección y proporcional a una constante del material que lo constituye.

Esta constante se llama resistividad y la representaremos por la letra griega **ρ** (ro).

Esto se expresa en términos matemáticos por:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (5)$$

El coeficiente tiene unidad de ohmio x metro, como se puede deducir de la ecuación 6. En estas ecuaciones **R** se mide en ohmios, la sección **A** en m² y la longitud **l** en m.

$$\rho = \frac{R \cdot A}{l} \quad (6)$$

También se utiliza la inversa de la resistividad, denominada conductividad, que designaremos por la letra griega **σ** (sigma). De acuerdo con lo anterior:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

Las unidades de la conductividad son: $\frac{1}{\Omega \times m}$ o $\frac{\mho}{m}$

2.5 Conductores y aisladores

Si se hace un estudio de los materiales más utilizados en Electricidad, se verá que se agrupan en dos clases bien diferentes, en cuanto al orden de magnitud de su resistividad.

Algunos materiales como el Cobre, Plata, Aluminio, presentan una resistividad del orden de 10^{17} veces menor que la de otros como corcho, mica, vidrio.

Los primeros reciben el nombre de conductores y los segundos de aisladores. Obsérvese que no existe el conductor perfecto (ρ=0) ni el aislante perfecto (σ=0).

<u>Ejercicios</u>

1) Se quiere construir una resistencia de 0,47 Ω, utilizando un conductor de constantán de resistividad 49 x 10^{-8} Ω . m, de sección uniforme igual a 0,5 mm^2. Determinar la longitud necesaria.

2) Un conductor de 1,3 mm de radio y 100 m de largo presenta una tensión entre sus extremos de 5,16 V cuando la corriente que circula por él es de 3 A. Calcular la resistividad del material.

3) Una bobina de alambre de cobre de 0,5 mm de diámetro presenta una resistencia de 20 ohmios. Determinar el peso de dicha bobina.

2.6 Generadores

Los generadores eléctricos son dispositivos por medio de los cuales se puede obtener energía eléctrica a partir de cualquier otra forma de energía. Por ejemplo una dínamo convierte energía mecánica en energía eléctrica. Una batería de acumuladores convierte energía química en energía eléctrica y una célula fotovoltaica hace la conversión a partir de energía lumínica.

No nos ocuparemos del proceso físico de la conversión y trataremos al generador como un dispositivo de dos terminales.

En la figura 4 se ve la curva tensión-corriente correspondiente a una batería.

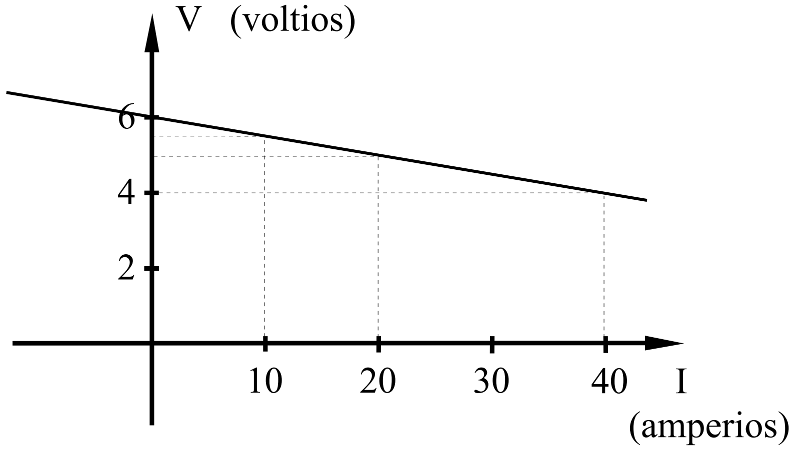


figura 4

En la figura 4 se ve que para I = 0 (batería desconectada) la tensión en sus bornes es de 6 voltios. Cuando la batería entrega energía la tensión en sus bornes baja, mientras que cuando recibe energía la tensión sube. Esta es una característica general de todos los generadores de tensión. Si un generador de tensión mantiene la tensión entre sus bornes constante, cualquiera sea la corriente que lo atraviese, se le considera un *generador de tensión ideal*. Ningún generador real cumple esta condición perfectamente, aún cuando, en algunas circunstancias y a los fines prácticos un generador real puede ser considerado como ideal. En beneficio de la simplicidad consideraremos por ahora a los generadores como ideales.

De la misma manera que hemos definido el generador de tensión ideal, definiremos el *generador de corriente ideal* como aquel dispositivo de dos terminales capaz de entregar una corriente de valor constante independiente de la tensión entre sus bornes.

En la figura 5 se ven los símbolos de ambos generadores.

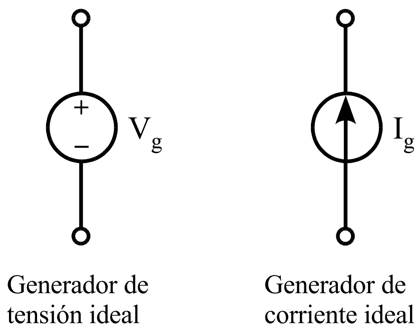


figura 5

2.7 Circuitos eléctricos

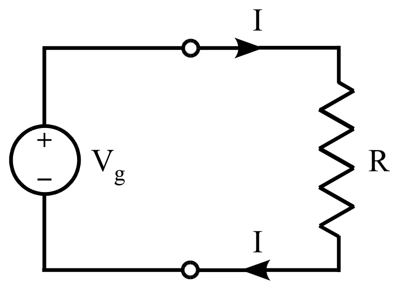


figura 6

El circuito más elemental que puede concebirse está constituido por un generador y por una resistencia o una conductancia. (figura 6)

Como consecuencia de la conexión, el generador de tensión aplica una diferencia de potencial de valor V_g a los bornes de la resistencia R. De acuerdo a la ley de Ohm, en la resistencia circulará una corriente de intensidad:

$$(8) \qquad I = \frac{V_g}{R}$$

Haremos ahora un balance energético en este circuito.

De acuerdo a lo visto anteriormente (ver cuaderno 1), el generador al forzar la circulación de la carga eléctrica en el circuito, entrega una cantidad de energía que será igual a:

$$(9) \qquad E = V_g \cdot \Delta q \qquad (\mathit{julios})$$

siendo Δq la cantidad de carga.

Como la corriente que circula en el circuito se puede expresar como: $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$

podemos expresar la carga como el producto de la intensidad de corriente por el intervalo de tiempo: $\Delta q = I \cdot \Delta t$

con lo que la energía entregada por el generador será:

$$(10) \qquad E = V_g \cdot I \cdot \Delta t \qquad (\mathit{julios})$$

Esta energía entregada por el generador es convertida en calor por la resistencia.

La potencia es *la energía por unidad de tiempo* por lo que la potencia, que representaremos por la letra P, puede expresarse:

$$(11) \qquad P = \frac{E}{\Delta t} = V_g \cdot I$$

Si se expresa la corriente en amperios y la tensión en voltios, la potencia queda expresada en vatios. La expresión de la ec. 11 para la potencia puede adquirir otras formas que son bastante usuales, cuya demostración se deja a cargo del estudiante:

$$(12) \qquad P = I^2 \cdot R \qquad (\mathit{vatios})$$

$$(13) \qquad P = \frac{V_g^2}{R} \qquad (\mathit{vatios})$$

2.8 Leyes de Kirchhoff

Las dos leyes de Kirchhoff (físico alemán que las enunció por primera vez en 1841) son la base de todo el estudio posterior de los circuitos eléctricos.

Presentaremos a continuación las dos leyes derivadas de los dos principios fundamentales que ya han sido expuestos anteriormente: el principio de conservación de la carga y el principio de conservación de la energía (ver cuaderno 1).

2.9 Ley de Kirchhoff de las corrientes

En la figura 7 se ven cuatro conductores, cada uno transportando una corriente que confluyen o divergen de un nudo. *Nudo* se denomina a la unión de dos o más conductores.

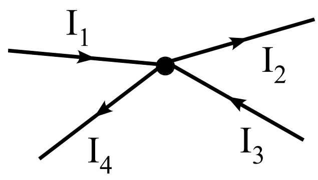


figura 7

Designaremos las corrientes en cada conductor por I_1, I_2, I_3 e I_4. El sentido de cada corriente queda explicitado por una flecha superpuesta al conductor.
No nos interesa el mecanismo que produce las corrientes, simplemente suponemos que están fluyendo.

Llamaremos a su vez Δq_1, Δq_2, Δq_3 y Δq_4 a las cantidades de carga que circulan por el conductor.

En un intervalo de tiempo Δt, la corriente I_1 hace entrar al nudo una cantidad de carga Δq_1, I_3 hace entrar Δq_3, mientras que I_2 e I_4 sacan o drenan del nudo Δq_2 y Δq_4 respectivamente.

Si aplicamos al nudo el principio de conservación de la carga, o sea consideramos que en el nudo ni se crea ni se destruye carga alguna, debemos concluir que la carga que entra al nudo tiene que salir de él.

Por lo tanto concluimos que en el nudo en un intervalo Δt se cumple:

$$(14) \quad \Delta q_1 + \Delta q_3 = \Delta q_2 + \Delta q_4$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación anterior por Δt tenemos:

$$(15) \quad I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Este resultado se puede extender a cualquier número de conductores todos unidos al mismo nudo y se expresa diciendo que: *La suma de las corrientes* *entrantes a un nudo es igual a la suma de las corrientes salientes del nudo.* Esto constituye la ley de Kirchhoff de las corrientes.

La ley de Kirchhoff de las corrientes suele expresarse de esta otra manera: *La suma algebraica de las corrientes que se dirigen a un nudo es igual a cero.*

Esta última expresión se indica en forma matemática así:

$$(16) \qquad \sum \pm \mathrm{I} = 0$$

Veremos que los dos enunciados son equivalentes. Tomemos la ec. 15 y trasponiendo términos al primer miembro:

$$(17) \qquad \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_4 = 0$$

En la ec. 17 I_1 e I_3 aparecen en el primer miembro con signo positivo, mientras que I_2 e I_4 aparecen con signo negativo. El segundo miembro de la ecuación es igual a cero. Si observamos la fig. 7 vemos que las dos corrientes que aparecen con signo positivo en la ec. 17 son ambas entrantes al nudo, lo cual se ve fácilmente, pues la punta de la flecha que indica el sentido de la corriente apunta hacia el nudo.

Por su parte I_2 e I_4, que aparecen con signo negativo, son salientes del nudo como lo indica claramente la flecha.

Hubiera sido posible escribir la ecuación 17 en forma mecánica asignando signo positivo a las corrientes entrantes al nudo y signo negativo a las corrientes salientes del nudo, sumarlas algebraicamente e igualarlas a cero. Se hubiera obtenido así, en forma compacta la ec. 16, repetida aquí:

$$\sum \pm \mathrm{I} = 0$$

Obsérvese que asignar signo positivo a las corrientes entrantes y signo negativo a las salientes es arbitrario. Podría haberse tomado una asignación de signos contraria y las ecuaciones resultarían equivalentes:

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_4 = 0$$

$$-\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_4 = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores son equivalentes, ya que basta con multiplicar cualquiera de ellas miembro a miembro por -1 para obtener la otra.

2.10 Ley de las tensiones de Kirchhoff

Considérese el circuito de la figura 8. Supongamos que una carga **q** se desplaza desde el punto **a** hasta el punto **b**. En ese trayecto, la carga disminuirá su energía potencial eléctrica en una cantidad:

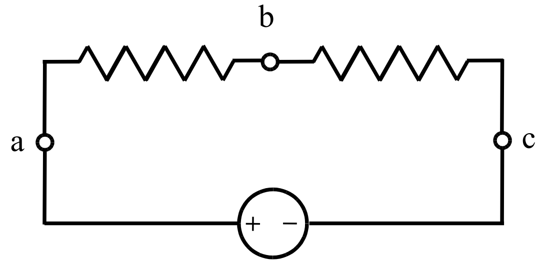


figura 8

$$\Delta E_1 = q \cdot V_{ab}$$

donde $V_{ab} = V_a - V_b$, es la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

Si la carga recorre un camino cerrado, por ejemplo a-b-c-a, al retornar al punto de partida tendrá la misma energía potencial eléctrica, por lo que su variación será nula:

$$\Delta E = 0$$

Por lo tanto la carga habrá ganado en el generador la misma cantidad de energía que perdió en las resistencias. Esto puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$(18) \qquad \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = 0$$

donde ΔE_1 es la variación de energía que experimenta la carga entre **a** y **b**, ΔE_2 es la variación de energía entre los puntos **b** y **c**, y ΔE_3 es la variación de energía de la carga **q** entre **c** y **a**.

Teniendo en cuenta que $\Delta E_1 = q \cdot V_{ab}$, $\Delta E_2 = q \cdot V_{bc}$ y $\Delta E_3 = q \cdot V_{ca}$, sustituyendo en la ecuación 18 se tiene:

$$(19) \qquad q \cdot V_{ab} + q \cdot V_{bc} + q \cdot V_{ca} = 0$$

dividiendo miembro a miembro por **q** se tiene:

$$(20) \qquad V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$$

La ecuación anterior es la expresión matemática de la ley de tensiones de Kirchhoff.

Dicha ley expresa que:

En un camino cerrado de un circuito eléctrico, la suma algebraica de las tensiones es igual a cero.

Obsérvese que la ley habla de la suma algebraica, por lo que alguna de las expresiones V_{ab}, V_{bc} o V_{ca} debe ser negativa (pero no todas), para que la ec. 20 se cumpla.

En forma compacta podemos expresar la ley de tensiones por la ecuación:

$$(21) \qquad \sum \pm V = 0$$

Esta ley expresa teóricamente algo fácilmente comprobable con un voltímetro en un circuito eléctrico. Si se miden con un voltímetro electrónico las tensiones alrededor de un camino cerrado, la suma debe ser cero.

Es necesario señalar que para tomar las medidas de las tensiones con el voltímetro, se debe colocar el positivo del voltímetro en el terminal indicado por el primer subíndice y el terminal negativo en el otro.

De esta manera algunas de las tensiones serán positivas y otras negativas.

2.11 Conexión de resistencias en serie

Se dice que dos resistencias están en serie cuando son recorridas por la misma corriente. El ejemplo más sencillo se ve en la figura 9.

Veremos el resultado de esta conexión a partir del análisis de este circuito.

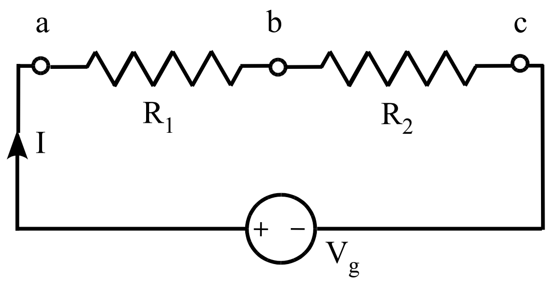


figura 9

En él tenemos:

$$(22) \qquad V_{ab} + V_{bc} = V_g$$

De la aplicación de la ley de Ohm resulta:

$$(23) \qquad V_{ab} = I \cdot R_1 \;\; ; \;\; V_{bc} = I \cdot R_2$$

por lo que sustituyendo en la ec. 22:

$$(24) \qquad I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = V_g$$

Dividiendo ambos por I:

$$(25) \qquad \frac{V_g}{I} = R_1 + R_2$$

De acuerdo con la ecuación 25, una única resistencia de valor $R_1 + R_2$ hará que el generador entregue una corriente del mismo valor a la que circula por el circuito de la figura 9.

Se dice por lo tanto que la resistencia equivalente de dos resistencias en serie es una resistencia igual a la suma de las resistencias conectadas en serie.

Esto es válido para cualquier número de resistencias conectadas en serie.

2.12 Conexión de resistencias en paralelo

Se dice que dos resistencias o dos conductancias están conectadas en paralelo cuando tienen la misma tensión aplicada entre sus bornes (figura 10).

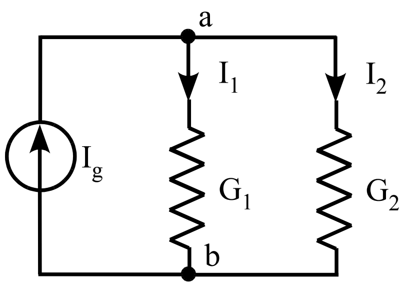


figura 10

Aplicando la ley de Ohm a las conductancias G_1 y G_2 se tiene:

$$(26) \quad I_1 = V_{ab} \cdot G_1 \;\; ; \;\; I_2 = V_{ab} \cdot G_2$$

Por la ley de las corrientes:

$$(27) \quad I_g = I_1 + I_2$$

por lo que:

$$(28) \quad I_g = V_{ab} \cdot G_1 + V_{ab} \cdot G_2$$

$$(29) \quad \frac{I_g}{V_{ab}} = G_1 + G_2$$

De la ecuación 29 concluimos que la conductancia equivalente de dos conductancias en paralelo es su suma. Esto es válido para cualquier número de conductancias.

Ejercicios

1) Verificar que la resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es el producto dividido la suma de ambas resistencias.

2) Verificar que la conductancia equivalente de dos conductancias en serie es el producto dividido la suma de ambas conductancias.

2.13 Agrupaciones de elementos serie - paralelo

Es útil para el análisis de algunos circuitos la simplificación del circuito a partir de la agrupación de elementos en serie y en paralelo.

Es importante señalar que no todo circuito puede ser simplificado mediante estas técnicas. Para esos fines se han desarrollado técnicas más avanzadas, que serán tratadas más adelante.

A modo de ejemplo, considérese el circuito de la figura 11.

Este circuito se puede reducir de la siguiente manera:

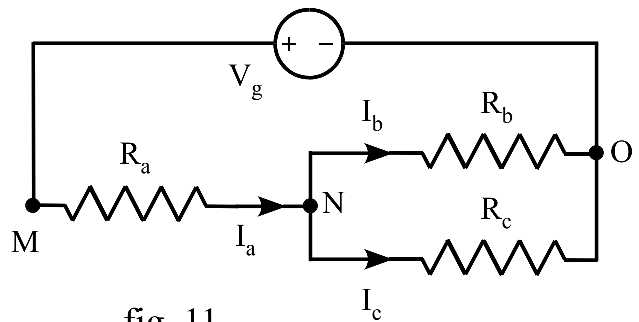


fig. 11

1°) Reconocemos que R_b y R_c tienen la misma tensión aplicada en sus terminales, por lo que están en paralelo. Así, el circuito se puede simplificar (fig. 12) En el circuito de la figura 12, de acuerdo a lo ya visto:

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$$

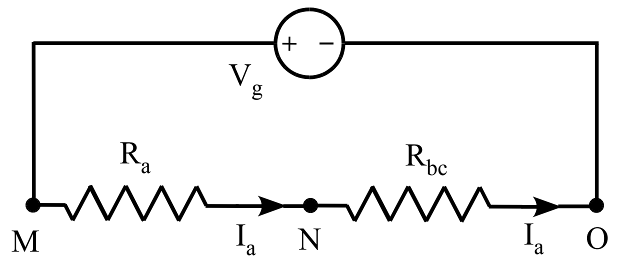


figura 12

2°) Se ve claramente en la figura 12 que R_a y R_{bc} están en serie por estar recorridas por la misma corriente. Con esta nueva simplificación se tiene el circuito de la figure 13.

En este último circuito se tiene que:

$$R_{abc} = R_a + R_{bc}$$

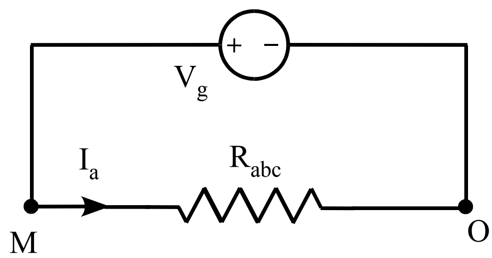


figura 13

Para calcular las tensiones y corrientes en cada elemento, debe desandarse el camino anterior.

Así:

$$I_a = \frac{V_g}{R_{abc}}$$

$$V_{NO} = I_a \cdot R_{bc} \quad ; \quad I_b = \frac{V_{NO}}{R_b} \quad ; \quad I_c = \frac{V_{NO}}{R_c}$$

Ejercicio

En el circuito de la figura 11, sea:

V_g = 24 V. , R_a = 4 Ω , R_b = 6 Ω , R_c = 3 Ω

Calcular todas las tensiones y corrientes y verificar que se cumplen las leyes de Kirchhoff.

Como ejemplo de circuito que no puede ser resuelto por agrupaciones serie - paralelo se tiene el de la figura 14.

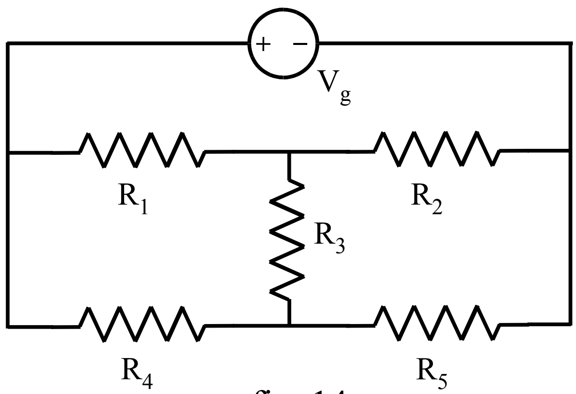


fig. 14

Como no se puede identificar una tensión común a dos resistencias, ni una corriente común a dos de ellas, se puede concluir que no existen en este circuito ni agrupaciones serie ni paralelo.

2.14 Divisor de tensión

Siempre que haya dos resistencias conectadas en serie se puede calcular fácilmente la tensión en cada una de ellas, suponiendo conocida la diferencia de potencial entre los extremos de la agrupación y los valores de las resistencias.

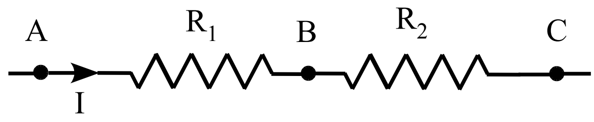


figura 15

Así en el circuito de la figura 15 se tiene:

$$(30) \qquad V_{AB} = \frac{V_{AC} \cdot R_1}{R_1 + R_2} \quad ; \quad V_{BC} = \frac{V_{AC} \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Esto último se puede demostrar fácilmente teniendo en cuenta que:

$$(31) \qquad I = \frac{V_{AC}}{R_1 + R_2}$$

y que multiplicando el valor de la corriente por cada una de las resistencias se obtiene el valor de tensión en sus bornes.

Esto se puede generalizar para cualquier número de resistencias: *La tensión sobre una resistencia cualquiera de una serie es igual a la tensión en los extremos, multiplicada por la resistencia en cuestión y dividido por la suma de todas las resistencias.*

Esto último constituye el enunciado de lo que algunos autores denominan el teorema de división de tensiones.

2.15 Divisor de corrientes

Si se conoce la corriente que entra en un paralelo de dos resistencias, la corriente en una rama cualquiera se puede calcular fácilmente (figura 16).

Demostraremos a continuación que:

$$(32) \qquad I_1 = \frac{I_t \cdot G_1}{G_1 + G_2} \quad ; \quad I_2 = \frac{I_t \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

En efecto, la tensión V_{AB} será igual a la corriente total (I_t) dividida por la conductancia equivalente, o sea $G_1 + G_2$. Luego, multiplicando V_{AB} por cada una de la conductancias de rama, se obtienen las corrientes I_1 e I_2.

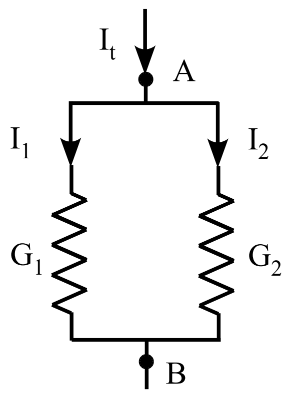


figura 16

También se puede generalizar este resultado para cualquier número de resistencias en paralelo. *La corriente en una rama cualquiera de un paralelo de resistencias es igual a la corriente total que entra a la agrupación, multiplicada por la conductancia de la rama en cuestión y dividida por la suma de todas las conductancias de la agrupación.*

Esto último constituye el enunciado del llamado teorema de división de corrientes.

<u>Ejercicio</u>

Para agrupaciones de 2 elementos, plantear las expresiones del divisor de tensión con conductancias y del divisor de corrientes con resistencias.

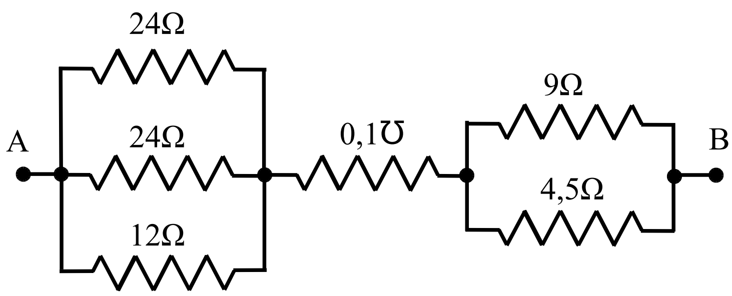
Problemas

1)

Dos conductores, uno de cobre de 4 mm^2 de sección y 3000 m de largo y otro de aluminio de igual sección y 2000 m de largo se hallan unidos como muestra la figura.

Si se aplica a los extremos una tensión de 10 V, determinar la corriente y la tensión en cada conductor.

2)

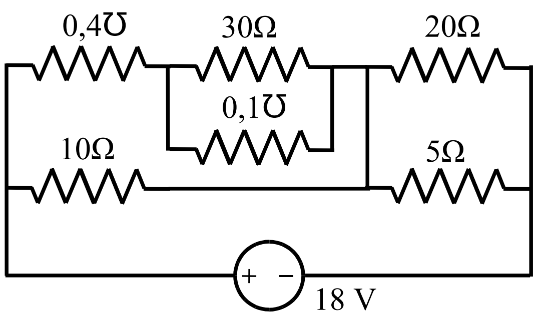


Hallar la resistencia y la conductancia equivalentes entre los terminales A y B.

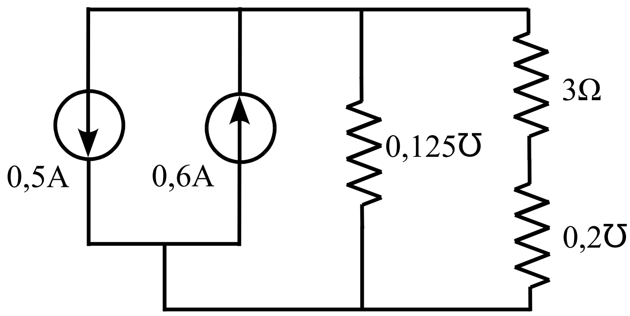
3)

En paralelo con una conductancia de 0,1 mhos se desea conectar una resistencia para obtener una resistencia equivalente de 3 ohmios. Determinar el valor de dicha resistencia.

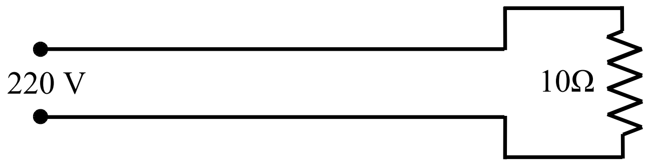
4) Calcular la tensión y corriente en cada elemento.



5) Calcular las corrientes y tensiones en cada elemento.

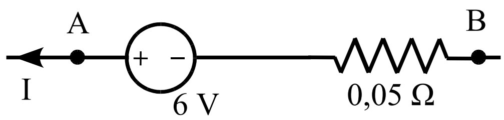


6)



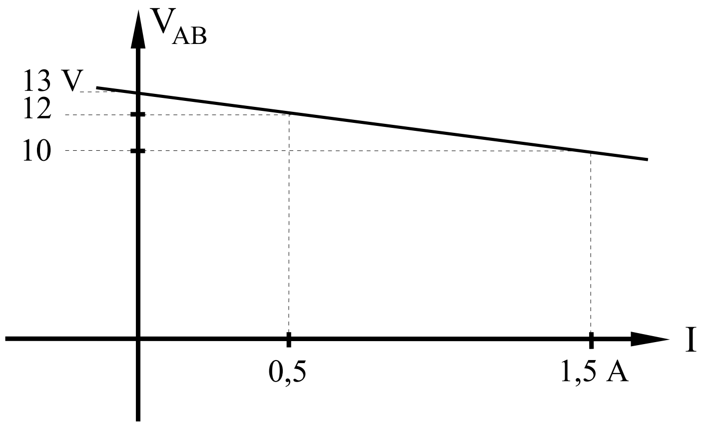
Una línea de alambre de cobre lleva energía eléctrica hasta una carga que presenta una resistencia de 10 ohmios. La longitud de la línea es de 150 metros y la sección de los conductores es de 0,8 mm^2. Calcular el voltaje en la carga, la potencia disipada en los conductores y la potencia en la carga.

7)



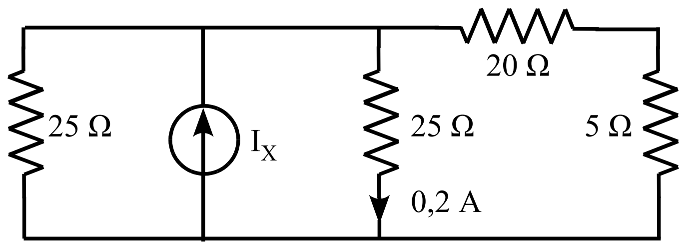
Calcular la tensión V_{AB} para los siguientes valores de corriente: I = 0, 10, 20 y 40 amperios. Construir la gráfica de la tensión V_{AB} en función de la corriente **I** y compararla con la gráfica de la figura 4. ¿Que conclusión puede extraer?

8)



Hallar el circuito cuya gráfica tensión-corriente se ve en la figura.

9)

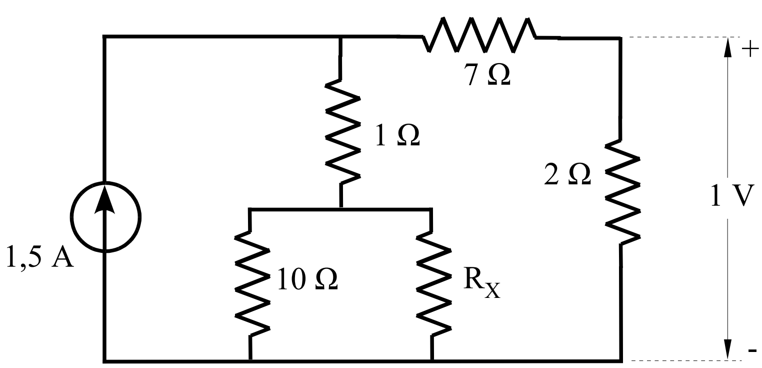


Calcular I_X.

10) Calcular la intensidad de la corriente en una lámpara incandescente de 40 W, 220 V.

¿Cuál es su resistencia?

11)



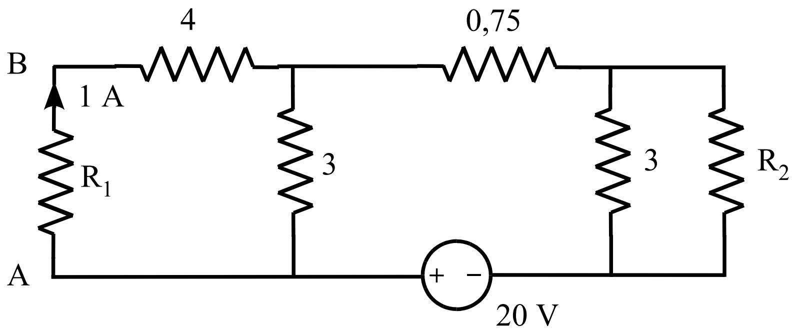
Determinar el valor de R_x.

12) Una batería de 6 voltios se carga durante 4 horas con una corriente de 2 amperios y durante 2 horas mas con una corriente de 1,5 A.

a) Calcular la carga y la energía acumuladas en ese tiempo (6 h)

b) ¿Cuánto tiempo demora la batería en devolver esa energía si se le conecta una resistencia de 10 ohmios ?

13)



Los valores de las resistencias están expresados en ohmios.

Si se sabe que V_{AB} = 5 V , calcular R_1 y R_2.

14) Una línea de dos conductores de cobre alimenta una carga por la que circula una corriente de 1 amperio. La tensión en la carga es de 200 voltios y la tensión del generador es de 220 voltios. Calcular la sección de los conductores si el largo de la línea es de 1500 metros.

3. Ecuaciones de redes

Ing. Juan C. Bonello, Ing. Pedro Castro

3.1 Introducción

En este capítulo se extenderán los métodos vistos en el capítulo anterior, con la finalidad de aplicarlos a la resolución de circuitos más complejos.

Resolver un circuito significa calcular una o más magnitudes en función de otras expresamente conocidas que denominaremos datos.

Dada la complejidad de los circuitos que el estudiante manejará, se hace necesario sistematizar métodos de resolución.

Los métodos que estudiaremos a continuación, se basan en las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm.

3.2 Definiciones y convenciones de redes

Definiremos como:

Nudo: Unión de dos o más conductores.

Lazo: Camino cerrado en una red que no pasa dos veces por el mismo punto.

Rama: Camino que va de un nudo a otro por el que circula una misma corriente.

Malla: Lazo que no contiene ningún otro lazo interior.

Corriente de rama: Es la corriente que circula por una rama.

Corriente de malla: Es la corriente que circula por el camino formado por todas las ramas que forman una malla.

Potencial de nudo: Es el potencial de un nudo referido a cualquiera tomado como referencia.

Tensión de rama: Es la diferencia de potencial entre los nudos extremos de la rama.

Para aclarar estas definiciones, obsérvese el circuito de la figura 1.

Se han marcado en ella todos los nudos con letras de **a** hasta **i**. El camino de unión entre dos nudos es una rama, por lo que cada elemento eléctrico tiene asiento sobre una rama. Es común considerar como rama a dos o más elementos recorridos por la misma corriente y unidos por nudos tales como los **b**, **c**, **g** e **i**.

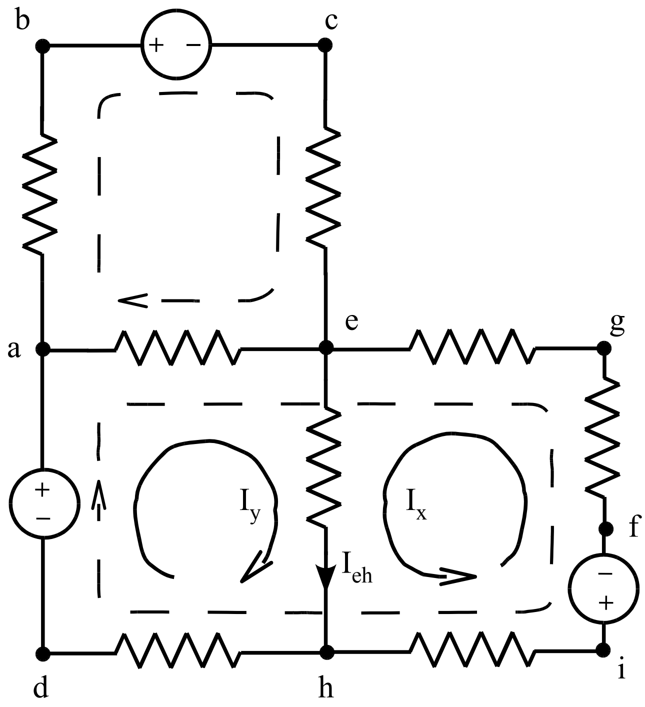


fig. 1

En la fig. 1 se han marcado dos lazos con una línea punteada. El lazo interior que no contiene otro lazo constituye una malla. Como ejemplo de corriente de rama anotamos la corriente que circula entre los nudos **e** y **h**, marcada con una flecha superpuesta al conductor y que indica el sentido de la corriente.

La corriente de rama es la corriente que se mediría intercalando un amperímetro en la rama en cuestión.

La corriente de rama se puede calcular como la suma algebraica de las corrientes de malla a las cuales la rama es común. En el caso de la rama considerada anteriormente:

$$I_{eh} = I_y + I_x$$

La tensión de la rama **eh** sería la diferencia de potencial entre los nudos extremos de la rama. O sea:

$$V_{eh} = V_e - V_h$$

La tensión de rama sería la tensión que se mediría con un voltímetro conectado en los nudos extremos de la rama.

Fijaremos ahora ciertas normas a las cuales deberá ceñirse el estudiante para facilitar la escritura de las ecuaciones de una red:

i) Se puede cambiar el sentido de una corriente cambiando su signo. En la figura 2 se da un ejemplo de estas dos notaciones. De acuerdo con ésto se tiene:

$$I_1 = - I_2$$

fig. 2

ii) La diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito se puede indicar mediante dos subíndices. Así por ejemplo en la figura 3, $V_{ab} = 2$ V significa que la diferencia de potencial entre el punto **a** y el punto **b** es de 2 voltios.

$$V_{ab} = V_a - V_b$$

Puede verse que

$$V_{ab} = - V_{ba}$$

También puede indicarse una diferencia de potencial mediante los signos de **+** y de **–** en los puntos entre los cuales se mide esa diferencia de potencial. Así en la figura 3:

$$V_1 = - V_2$$

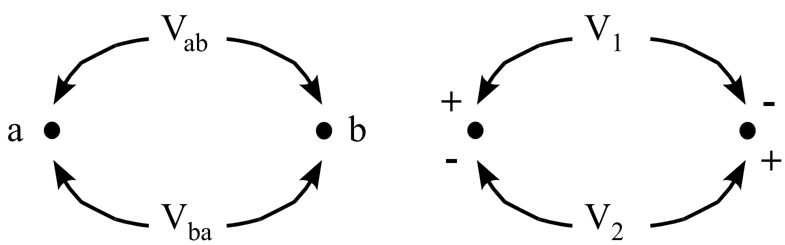
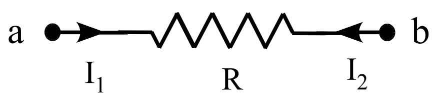


fig. 3

iii) Como resultado de las normas anteriores se tiene (fig. 4).



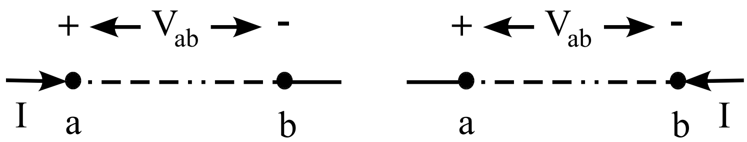
$$V_{ab} = I_1 \cdot R$$

$$V_{ab} = - I_2 \cdot R$$

fig. 4

iv) Para establecer si un elemento entrega o consume energía, basta con determinar el signo de la potencia que en él se desarrolla. Si el signo de la potencia es positivo, el elemento consume energía. Si el signo es negativo, el elemento entrega energía al circuito.

Debe tomarse en cuenta el sentido de la corriente respecto a la diferencia de potencial para determinar el signo del producto, tal como se ve en la figura 5.



$P = V_{ab} \cdot I$ $\qquad$ $P = - V_{ab} \cdot I$

fig. 5

3.3 Método de las corrientes de malla

En este método para resolver un circuito eléctrico, las incógnitas son las corrientes de malla.

Se debe plantear en cada malla de la red la ley de tensiones de Kirchhoff.

Al plantear una ecuación por cada malla, se obtiene un sistema de ecuaciones. Aplicando este método, el número de ecuaciones que se obtiene es igual al número de incógnitas, por lo tanto el sistema tiene solución.

A fin de introducir el método de manera progresiva, comenzaremos con un circuito de una sola malla (fig. 6).

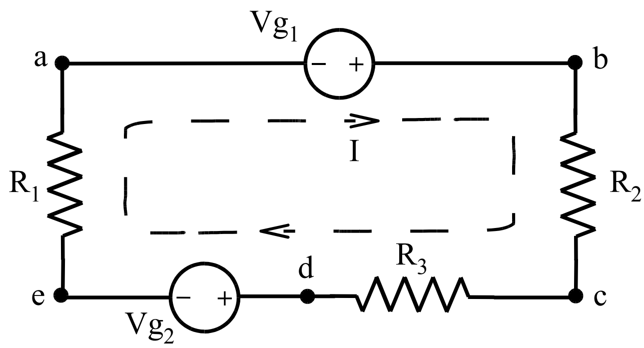


figura 6

Se suponen conocidos los valores de las resistencias y de las tensiones de los generadores y se desea conocer la corriente que circula en el circuito. Ésta será la misma para todas las ramas e igual a la corriente de malla **I**, a la que se supone un sentido arbitrario.

Aplicando la ley de tensiones en el camino cerrado **a-b-c-d-e** :

$$(1) \qquad V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de} + V_{ea} = 0$$

Los valores de cada una de las tensiones de la ecuación anterior pueden escribirse como:

$$(2) \qquad V_{ab} = -Vg_1 \qquad V_{bc} = I \cdot R_2 \qquad V_{cd} = I \cdot R_3$$

$$V_{de} = Vg_2 \qquad V_{ea} = I \cdot R_1$$

Sustituyendo las expresiones del grupo de ecuaciones (2) en la ecuación (1) se obtiene:

$$(3) \qquad -Vg_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + Vg_2 + I \cdot R_1 = 0$$

De donde se puede despejar **I**:

$$(4) \qquad I = \frac{Vg_1 - Vg_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

El valor de la corriente **I** puede resultar positivo o negativo. Si $Vg_1 > Vg_2$, **I** será positiva. Si por el contrario $Vg_1 < Vg_2$, **I** será negativa. En el caso que $Vg_1 = Vg_2$, **I** será cero.

Circuito de 2 mallas

Si el circuito tiene dos mallas, se supone una corriente por cada malla con sentidos arbitrarios (fig. 7).

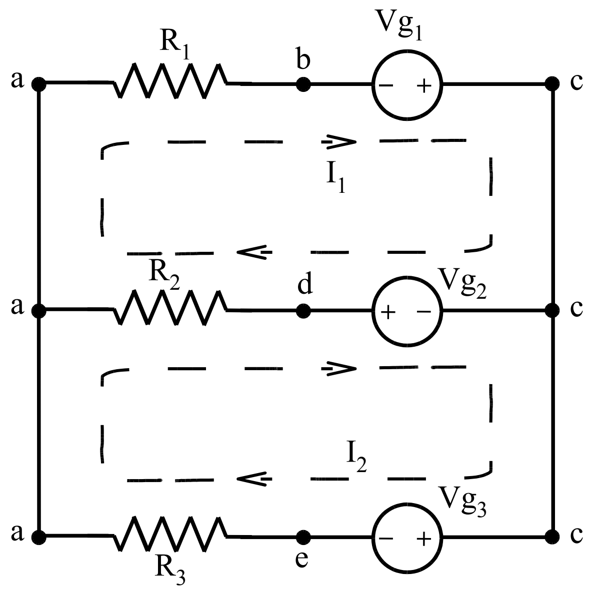


figura 7

La ley de las tensiones de Kirchhoff aplicada a las dos mallas expresa:

$$(5) \qquad V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} = 0$$

$$V_{ad} + V_{dc} + V_{ce} + V_{ea} = 0$$

Ahora bien:

$$(6) \quad V_{ab} = I_1 \cdot R_1 \qquad V_{bc} = -Vg_1 \qquad V_{cd} = -Vg_2$$

$$V_{da} = (I_1 - I_2) R_2 \qquad V_{ad} = -V_{da} = (I_2 - I_1) R_2$$

$$V_{dc} = Vg_2 \qquad V_{ce} = Vg_3 \qquad V_{ea} = I_2 \cdot R_3$$

Con respecto a las ecuaciones (6), obsérvese que por R_2 circula la suma de 2 corrientes: $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$. Es importante observar el sentido de estas corrientes, ya que si circulan ambas en el mismo sentido se suman y si circulan con sentidos opuestos se deben restar. Esto es muy importante para la correcta escritura de las ecuaciones de la red.

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (6) en las ecuaciones (5) se obtiene:

$$(7) \quad I_1 \cdot R_1 - Vg_1 - Vg_2 + (I_1 - I_2) R_2 = 0$$

$$(I_2 - I_1) R_2 + Vg_2 + Vg_3 + I_2 \cdot R_3 = 0$$

Ordenando estas ecuaciones:

$$(8) \quad (R_1 + R_2) I_1 \qquad - R_2 \cdot I_2 = Vg_1 + Vg_2$$

$$- R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) I_2 = - Vg_2 - Vg_3$$

Es conveniente que el estudiante adopte este método de plantear las ecuaciones de malla (ec. 8), que consiste en escribir cada término ordenado según su incógnita y agrupar los términos independientes (generadores) en el 2º miembro de la ecuación.

Debe notarse que las ecuaciones (8) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las dos corrientes de malla $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$. Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto por cualquiera de los métodos usuales.

En general, para un circuito de **n** mallas, se asignarán **n** corrientes de malla y se plantearán las ecuaciones de tensiones para cada malla, conformando así un sistema de **n** ecuaciones con **n** incógnitas.

Ejemplo numérico

Para el circuito de la figura 7, supóngase que los valores de las resistencias y los generadores son:

$$R_1 = 10\ \Omega \qquad R_2 = 2\ \Omega \qquad R_3 = 4\ \Omega$$

$$Vg_1 = 10\ V \qquad Vg_2 = 20\ V \qquad Vg_3 = 2\ V$$

Sustituyendo estos valores en las ec. (8):

$$12 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 = 30$$

$$-2 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 = -22$$

Para resolver este sistema, multiplicaremos la 1er ec. por 3:

$$36 \cdot I_1 - 6 \cdot I_2 = 90$$

Si a esta ecuación le sumamos la segunda:

$$34 \cdot I_1 = 68$$

de donde:

$$I_1 = 2\ A$$

Con este valor de I_1 en cualquiera de las dos ecuaciones originales se obtiene:

$$I_2 = -3\ A$$

Verificación

Una vez calculados I_1 e I_2, sustituyendo sus valores en las ecuaciones (6) se tiene:

$$V_{ab} = 20\ V \qquad V_{da} = 10\ V$$

$$V_{ad} = -10\ V \qquad V_{ea} = -12\ V$$

Con estos valores y las tensiones de los generadores, se tienen todas las tensiones de rama del circuito.

En la figura 8 se ha vuelto ha dibujar el circuito anteriormente resuelto, indicándose cada una de las tensiones calculadas anteriormente.

Si se toma un camino cerrado cualquiera, por ejemplo el camino **a-b-c-e-a** y se suman las tensiones:

$$20 - 10 + 2 - 12 = 0$$

lo cual verifica la ley de tensiones de Kirchhoff.

Para completar la verificación, habría que sumar las tensiones en un lazo que incluya la rama del medio, lo cual se deja a cargo del estudiante.

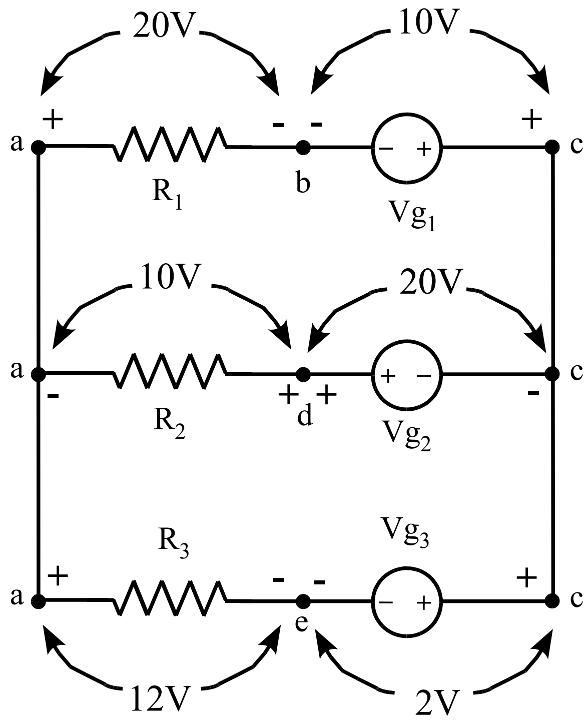


figura 8

3.4 Método de los potenciales de nudo

Para aplicar este método, se comienza eligiendo un nudo de referencia. Generalmente se elige el nudo en el cual confluyen más ramas. Esto se hace a fin de simplificar las ecuaciones resultantes.

Las incógnitas serán entonces los potenciales de cada uno de los nudos del circuito respecto al nudo de referencia, al cual se le asigna potencial cero.

A continuación se asignará una corriente por cada rama de la red, con sentidos arbitrarios.

Luego se escribirán las ecuaciones correspondientes a la ley de las corrientes de Kirchhoff para todos los nudos, excepto en el nudo de referencia.

Aplicando la ley de Ohm, se sustituirá en las ecuaciones anteriores cada corriente por su expresión en función de los potenciales de nudo correspondientes.

Como se tienen tantas ecuaciones de la ley de corrientes como nudos tiene el circuito menos uno (el de referencia), se tiene un sistema de ecuaciones en número igual al de incógnitas (los potenciales de cada nudo).

Este sistema de ecuaciones podrá ser resuelto por cualquiera de los métodos usuales.

Una vez obtenidos los potenciales de cada nudo, podrán calcularse fácilmente las corrientes de rama y así resolver el circuito.

Aclararemos el método mediante el ejemplo de la figura 9.

Elegido como nodo de referencia el nodo **b** y asignadas las corrientes de rama I_1 e I_2 (las otras corrientes de rama corresponden a los generadores Ig_1 e Ig_2), la ecuación del nudo **a** es:

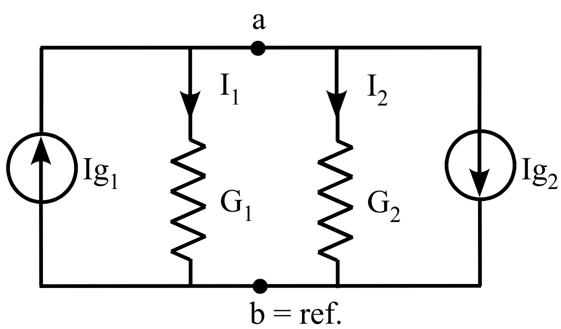


figura 9

$$(9) \quad Ig_1 = I_1 + I_2 + Ig_2$$

Aplicando la ley de Ohm:

$$(10) \quad I_1 = (V_a - V_b)G_1$$

$$I_2 = (V_a - V_b)G_2$$

Como el nudo **b** se ha elegido como referencia $V_b = 0$, por lo tanto las ec. (10) quedan:

$$(11) \qquad I_1 = V_a \cdot G_1 \quad , \quad I_2 = V_a \cdot G_2$$

Sustituyendo las expresiones de las ec. (11) en la ecuación (9) se tiene:

$$(12) \qquad Ig_1 = V_a \cdot G_1 + V_a \cdot G_2 + Ig_2$$

De esta última ecuación se puede despejar V_a :

$$(13) \qquad V_a = \frac{Ig_1 - Ig_2}{G_1 + G_2}$$

Una vez calculado el potencial V_a, las ec. (11) permiten calcular I_1 e I_2.

Circuito con 3 nudos

El paso siguiente en complejidad es el circuito de tres nudos, para el cual describiremos el método basados en el circuito de la figura 10.

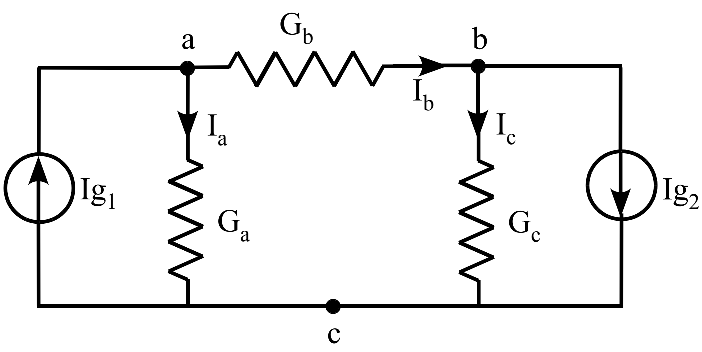


figura 10

Elegimos el nudo **c** como nudo de referencia, V_a y V_b serán pues las incógnitas.

Según el sentido asignado a las corrientes de rama y aplicando la ley de Ohm se tiene:

$$(14) \qquad I_a = (V_a - V_c)G_a \qquad\qquad I_b = (V_a - V_b)G_b$$

$$I_c = (V_b - V_c)G_c$$

Como el nudo **c** es el de referencia, $V_c = 0$, por lo que las ecuaciones (14) se pueden simplificar:

$$(15)\quad I_a = V_a \cdot G_a \;\;,\;\; I_b = (V_a - V_b)G_b \;\;,\;\; I_c = V_b \cdot G_c$$

Las ecuaciones correspondientes a la ley de corrientes de Kirchhoff en los nudos **a** y **b** son respectivamente:

$$(16)\quad Ig_1 = I_a + I_b$$

$$I_b = I_c + Ig_2$$

Sustituyendo las expresiones de las ec. (15) en las ecuaciones (16):

$$(17)\quad Ig_1 = V_a \cdot G_a + (V_a - V_b) G_b$$

$$(V_a - V_b)G_b = V_b \cdot G_c + Ig_2$$

Ordenando estas ecuaciones:

$$(18)\quad (G_a + G_b) V_a \; - \; G_b \cdot V_b = Ig_1$$

$$G_b \cdot V_a \; - (G_b + G_c) V_b = Ig_2$$

Las ecuaciones (18) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (V_a y V_b), que puede ser resuelto fácilmente.

Ejemplo numérico

En el circuito anteriorment resuelto, sean:

Ig_1 = 1,5 A $\quad$ Ig_2 = 0,5 A $\quad$ G_a = 0,125 ℧

G_b = 0,5 ℧ $\quad$ G_c = 0,250 ℧

Sustituyendo estos valores en las ec. (18):

$$0{,}625 \cdot V_a \; - \; 0{,}5 \cdot V_b = 1{,}5$$

$$0{,}5 \cdot V_a \; - \; 0{,}75 \cdot V_b = 0{,}5$$

multiplicando la 1ª ecuación por 1,5 :

$$0{,}9375 \cdot V_a \; - \; 0{,}75 \cdot V_b = 2{,}25$$

Si se le resta la 2ª ecuación:

$$0{,}4375 \cdot V_a = 1{,}75$$

$$V_a = 4\,\mathrm{V}$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones originales, se obtiene:

$$V_b = 2\,\text{V}$$

Una vez obtenidos los potenciales de nudo, pueden calcularse las tensiones y corrientes en cada rama.

$$I_a = 4 \text{ x } 0{,}125 = 0{,}5\,\text{A}$$

$$I_b = (4-2)0{,}5 = 1\text{A}$$

$$I_c = 2 \text{ x } 0{,}25 = 0{,}5\,\text{A}$$

Debe tenerse encuenta que los valores de V_a y V_b obtenidos, son las diferencias de potencial de esos nudos respecto al nudo **c**, al cual se le asignó potencial cero.

Si se hubiera tomado otro nudo como referencia, por ejemplo el **a**, los potenciales serían:

$$V_a = 0 \quad , \quad V_b = -2\text{ V} \quad \text{y} \quad V_c = -4\text{ V}$$

Este cambio en los valores de los potenciales de nudo se debe a que se cambió el nudo de referencia. Sin embargo, las diferencias de potenciales se mantienen constantes y por lo tanto las corrientes también.

Verificación

Se ha vuelto ha dibujar el circuito (fig. 11), indicándose los valores numéricos de las corrientes de rama y las diferencias de potencial entre nudos.

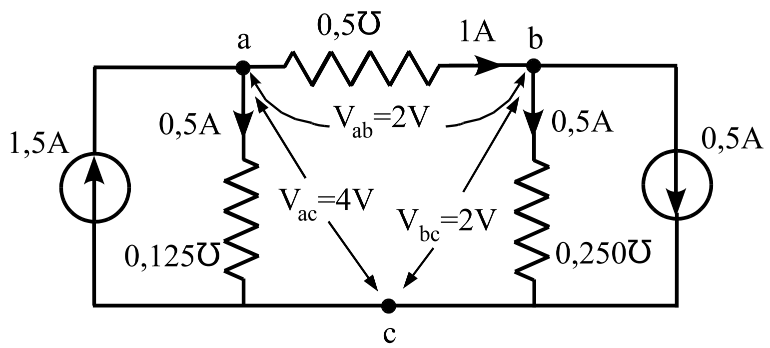


figura 11

Resulta fácil ver que se cumplen en los nudos la ley de corrientes y en el camino **a-b-c-a** la ley de tensiones.

3.5 Cálculo de potencias en un circuito

En los circuitos que hemos visto en las secciones anteriores, se supone que las tensiones y corrientes de los generadores son constantes.

En base a esa hipótesis, la potencia que desarrolla cada elemento puede calcularse de acuerdo a las convenciones del párrafo 2.

A modo de ejemplo, calcularemos las potencias en cada elemento del circuito de una malla de la figura 6, que se repite señalando tensiones y corrientes en la figura 12.

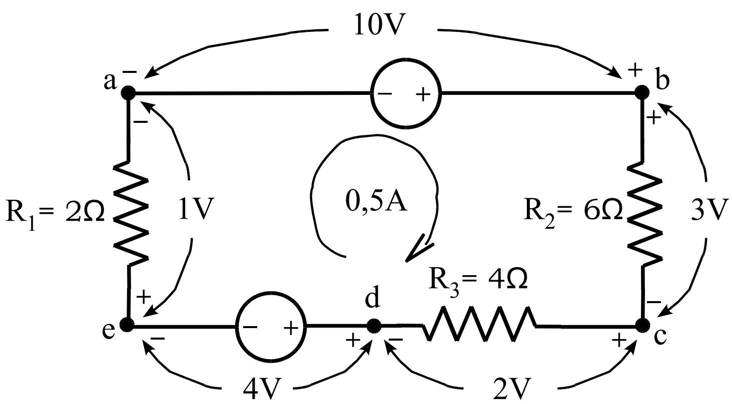


figura 12

La potencia en la resistencia de 6 Ω será igual a:

$$P\,(R_2) = V_{bc} \cdot I = 3 \text{ x } 0{,}5 = 1{,}5\,W$$

De la misma manera, las potencias en R_1 y R_3 serán 0,5 watts y 1 watt respectivamente.

En el generador de tensión Vg_1, la potencia será:

$$P\,(Vg_1) = -V_{ba} \cdot I = -10 \text{ x } 0{,}5 = -5\,W$$

En el generador de tensión Vg_2, la potencia será:

$$P\,(Vg_2) = V_{de} \cdot I = 4 \text{ x } 0{,}5 = 2\,W$$

De acuerdo a los resultados anteriores, la potencia positiva es igual a la potencia negativa. Esto quiere decir que la potencia consumida es igual a la potencia entregada al circuito, de acuerdo con el principio de consevación de la energía. El generador de tensión Vg_1 entrega potencia al circuito, mientras que el generador Vg_2 consume energía al igual que las resistencias.

Este es un ejemplo de un circuito en el cual un generador entrega energía y otro consume energía del circuito, En cambio, las resistencias sólo pueden consumir energía de un circuito, por lo que la potencia en una resistencia siempre será positiva.

3.6 Ejemplos resueltos

1) Comenzaremos resolviendo un circuito de 3 mallas, aplicando el método de las corrientes de malla (fig. 13),

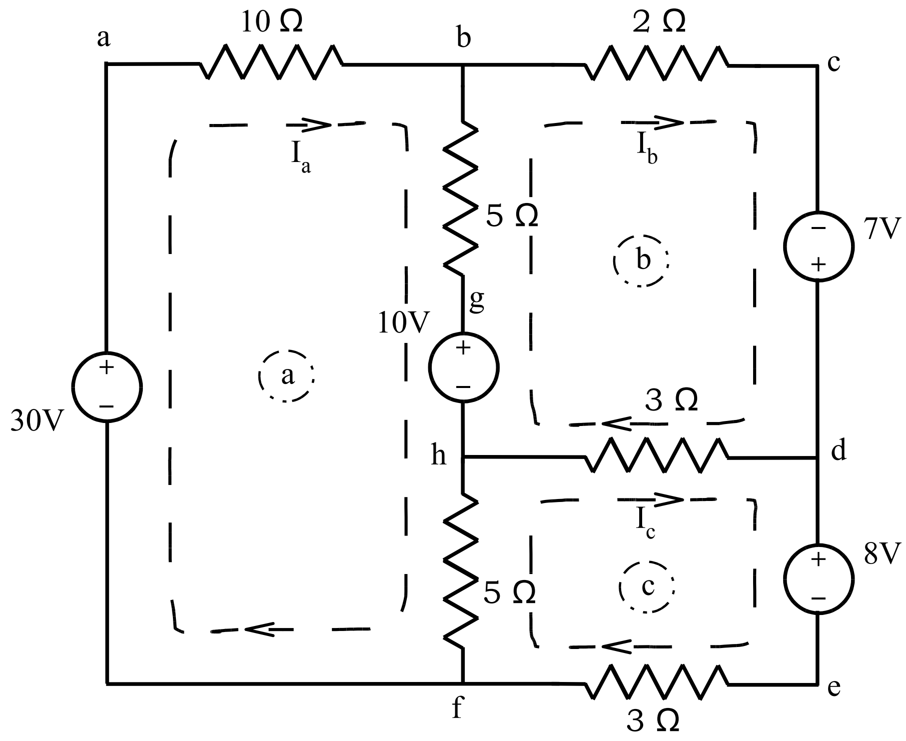


figura 13

Las ecuaciones de malla serán:

$$(a) \quad V_{ab} + V_{bg} + V_{gh} + V_{hf} + V_{fa} = 0$$

$$(b) \quad V_{bc} + V_{cd} + V_{dh} + V_{hg} + V_{gb} = 0$$

$$(c) \quad V_{hd} + V_{de} + V_{ef} + V_{fh} = 0$$

Ahora bien, de acuerdo a la ley de Ohm y los datos de las tensiones de los generadores:

$V_{ab} = 10 \cdot I_a$	$V_{bg} = 5(I_a - I_b)$	$V_{gh} = 10$
$V_{hf} = 5(I_a - I_c)$	$V_{fa} = -30$	$V_{bc} = 2 \cdot I_b$
$V_{cd} = -7$	$V_{dh} = 3(I_b - I_c)$	$V_{hg} = -10$
$V_{gb} = 5(I_b - I_a)$	$V_{hd} = 3(I_c - I_b)$	$V_{de} = 8$
$V_{ef} = 3 \cdot I_c$	$V_{fh} = 5(I_c - I_a)$	

Sustituyendo estos valores en las ec. *a*, *b* y *c*:

$$(a') \quad 10 \cdot I_a + 5(I_a - I_b) + 10 + 5(I_a - I_c) - 30 = 0$$

$$(b') \quad 2 \cdot I_b - 7 + 3(I_b - I_c) - 10 + 5(I_b - I_a) = 0$$

$$(c') \quad 3(I_c - I_b) + 8 + 3 \cdot I_c + 5(I_c - I_a) = 0$$

Ordenando estas últimas ecuaciones:

$$(1) \quad 20 \cdot I_a - 5 \cdot I_b - 5 \cdot I_c = 20$$

$$(2) \quad -5 \cdot I_a + 10 \cdot I_b - 3 \cdot I_c = 17$$

$$(3) \quad -5 \cdot I_a - 3 \cdot I_b + 11 \cdot I_c = -8$$

En el momento en que se obtuvieron las ecuac. *a'*, *b'* y *c'*, puede decirse que ha terminado la parte eléctrica de la resolución. Las ecuaciones 1, 2 y 3 presentan el sistema ordenado para su resolución por medio de cualquier técnica matemática apropiada. Pasaremos a resolver dicho sistema de ecuaciones.

Multiplicando la ec. 2 por 4 y sumándola a la primera ecuación:

$$(I) \quad 35 \cdot I_b - 17 \cdot I_c = 88$$

Restando de la segunda ec. la tercera ecuación:

$$(II) \quad 13 \cdot I_b - 14 \cdot I_c = 25$$

Las ec. I y II constituyen un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$(I) \quad 35 \cdot I_b - 17 \cdot I_c = 88$$

$$(II) \quad 13 \cdot I_b - 14 \cdot I_c = 25$$

Multiplicando la ec. I por 14 y la ec. II por 17 y restándolas, se obtiene:

$269 \cdot I_b = 807$; de donde:

$I_b = 3$ A

Sustituyendo este valor en la ec. II :

$39 - 14 \cdot I_c = 25$; lo que nos da:

$I_c = 1$ A

Sustituyendo los valores de I_b e I_c en la ecuación 1, por ejemplo, se obtiene:

$I_a = 2$ A

Verificación

La verificación consiste en comprobar la ley de tensiones de Kirchhoff en cualquier camino cerrado. La verificación completa debe incluir todas las ramas del circuito. Utilizaremos sólo una a modo de ejemplo, dejando el resto a cargo del estudiante.

La malla elegida para la verificación es la **a-b-g-h-f-a**.

Las corrientes de cada rama en la malla son:

en la rama **b-h** circula $I_a - I_b = -1$ A

en la rama **h-f** circula $I_a - I_c = 1$ A

en la rama **f-b** circula $I_a = 2$ A

El sentido de las corrientes antedichas es el mismo que el de I_a.

Partiendo del nudo **a** y recorriendo el lazo en el sentido de la corriente I_a tenemos:

$$\underbrace{10 \times 2}_{V_{ab}} + \underbrace{5(-1)}_{V_{bg}} + \underbrace{10}_{V_{gh}} + \underbrace{5 \times 1}_{V_{hf}} - \underbrace{30}_{V_{fa}} = 0$$

Esta ecuación verifica los cálculos efectuados al menos para la malla **a**.

2) Como segundo ejemplo, resolveremos el circuito de 4 nudos de la figura 14.

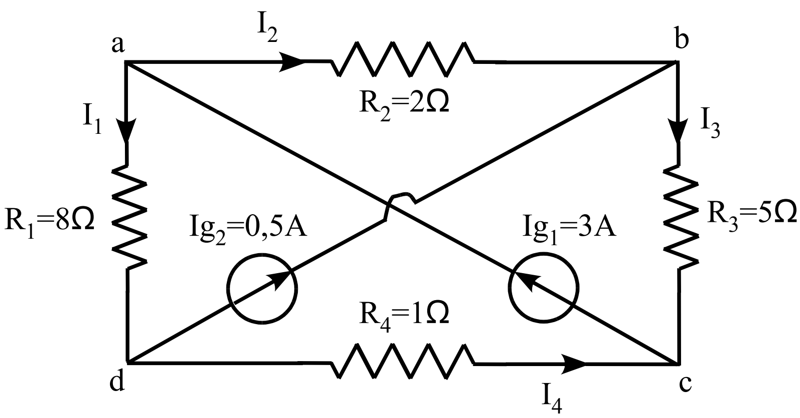


figura 14

Resolveremos este circuito aplicando el método de los potenciales de nudo.

A fin de facilitar la escritura de las ecuaciones, utilizaremos los valores de conductancia en lugar de las resistencias. Así:

$G_1 = 0{,}125\ \mho$ $\qquad G_2 = 0{,}5\ \mho$ $\qquad G_3 = 0{,}2\ \mho$ $\qquad G_4 = 1\ \mho$

Como en todos los nudos confluyen 3 ramas, elijamos arbitrariamente el nudo **c** como referencia. Por lo tanto $V_c = 0$.

Las incógnitas serán V_a , V_b y V_d.

De acuerdo a las asignaciones de corrientes de rama:

$I_1 = (V_a - V_d)\ 0{,}125 \qquad I_2 = (V_a - V_b)\ 0{,}5$

$I_3 = (V_b)\ 0{,}2 \qquad I_4 = (V_d)\ 1$

Las ecuaciones de corrientes en los nudos **a**, **b** y **d** son:

$$(a) \quad Ig_1 = I_1 + I_2$$

$$(b) \quad Ig_2 + I_2 = I_3$$

$$(d) \quad I_1 = Ig_2 + I_4$$

Sustituyendo las expresiones de cada corriente:

$$(a') \quad 3 = 0{,}125(V_a - V_d) + 0{,}5(V_a - V_b)$$

$$(b') \quad 0{,}5 + 0{,}5(V_a - V_b) = 0{,}2 \cdot V_b$$

$$(d') \quad 0{,}125(V_a - V_d) = 0{,}5 + 1 \cdot V_d$$

Ordenando estas ecuaciones se tiene:

$$(1) \quad 0{,}625 \cdot V_a - 0{,}5 \cdot V_b - 0{,}125 \cdot V_d = 3$$

$$(2) \quad -0{,}5 \cdot V_a + 0{,}7 \cdot V_b = 0{,}5$$

$$(3) \quad -0{,}125 \cdot V_a + 1{,}125 \cdot V_d = -0{,}5$$

Nótese que se han vuelto a presentar las ecuaciones de modo de facilitar su resolución. Multiplicando la ec. 2 por 1,25 y sumándola a la ec. 1 se elimina la incógnita V_a :

$$(I) \quad 0{,}375 \cdot V_b - 0{,}125 \cdot V_d = 3{,}625$$

Multiplicando ahora la ec. 3 por 5 y sumándola a la ec. 1 tenemos:

$$(II) \qquad -0{,}5\cdot V_b + 5{,}5\cdot V_d = 0{,}5$$

Las ecuaciones I y II conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$(I) \qquad 0{,}375\cdot V_b - 0{,}125\cdot V_d = 3{,}625$$

$$(II) \qquad -0{,}5\cdot V_b + \quad 5{,}5\cdot V_d = 0{,}5$$

Multiplicando la ec. **II** por 0,75 y sumándola a la ecuación **I** se obtiene:

$4\cdot V_d = 4$; de donde :

$\underline{V_d = 1\ V.}$

Con este valor sustituído en la ec. 3 :

$\underline{V_a = 13\ V.}$

Sustituyendo V_a en la ec. 2 :

$\underline{V_b = 10\ V.}$

Una vez obtenidos los potenciales de cada nudo, aplicando la ley de Ohm se obtienen las corrientes de rama:

$$I_1 = (13 - 1)0{,}125 = 1{,}5\,A$$

$$I_2 = (13 - 10)0{,}5 = 1{,}5\,A$$

$$I_3 = (10 - 0)0{,}2 = 2\,A$$

$$I_4 = (1 - 0)1 = 1\,A$$

El estudiante puede verificar que los resultados anteriores cumplen con la ley de las corrientes en todos los nudos del circuito.

3) Consideremos ahora la resolución del circuito de la figura 15 por el método de los potenciales de nudo.

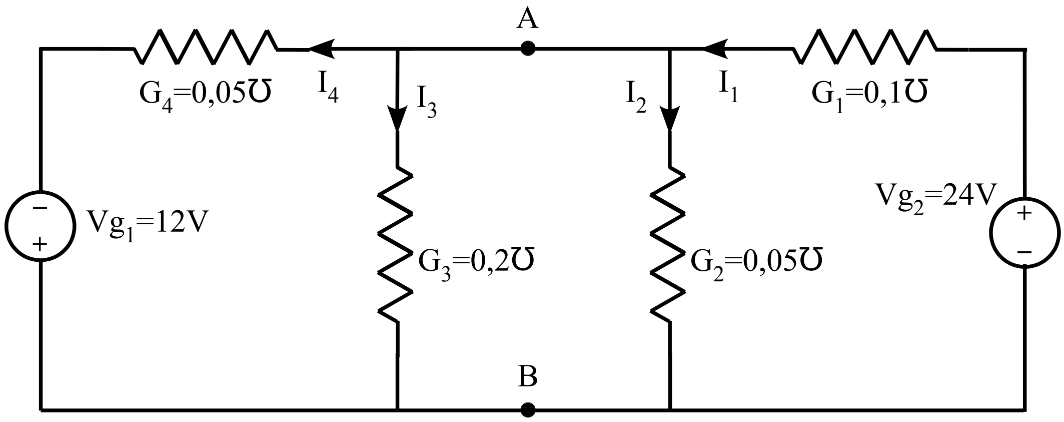


figura 15

La aplicación del método de los potenciales de nudo puede simplificar la resolución del circuito, tal como en este caso.

En el ejemplo a considerar, tendremos una sola ecuación con una sola incógnita. Si se hubiera utilizado el método de las corrientes de malla, tendríamos 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Elijamos el nudo **b** como referencia. La ley de corrientes expresa:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

Puede verse que:

$$I_1 = (Vg_2 - V_a)G_1$$

Del mismo modo y tomando cuidado con el sentido del generador de tensión Vg_1 y el sentido de I_4.

$$I_4 = (V_a + Vg_1)G_4$$

Se puede ver fácilmente que: $I_2 = V_a \cdot G_2$; $I_3 = V_a \cdot G_3$

Con estas expresiones, la ecuación de corrientes queda:

$$(Vg_2 - V_a)G_1 = V_a \cdot G_2 + V_a \cdot G_3 + (V_a + Vg_1)G_4$$

En esta última ecuación, la única incógnita es V_a.

Dejamos como ejercicio para el estudiante la resolución del problema para los valores numéricos dados en la fig. 15.

4) Como último ejemplo, aplicaremos el método de las corrientes de malla al circuito de la figura 16.

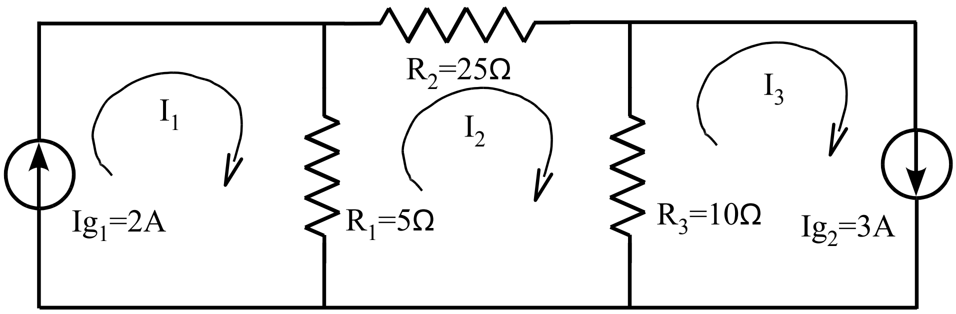


figura 16

Veremos que este método da lugar a una sola ecuación con una sola incógnita. De aplicarse el método de los potenciales de nudo resultarían 2 ecuaciones con 2 incógnitas, lo que hace más trabajosa su resolución.

Las ecuaciones de malla serán:

$$(I_2 - I_1)R_1 + I_2 \cdot R_2 + (I_2 - I_3)R_3 = 0$$

$$I_1 = Ig_1$$

$$I_3 = Ig_2$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2 según las dos últimas ecuaciones, nos queda:

$$(I_2 - Ig_1)R_1 + I_2 \cdot R_2 + (I_2 - Ig_2)R_3 = 0$$

En esta última ecuación la incógnita es I_2 , ya que se suponen conocidos los valores de los generadores.

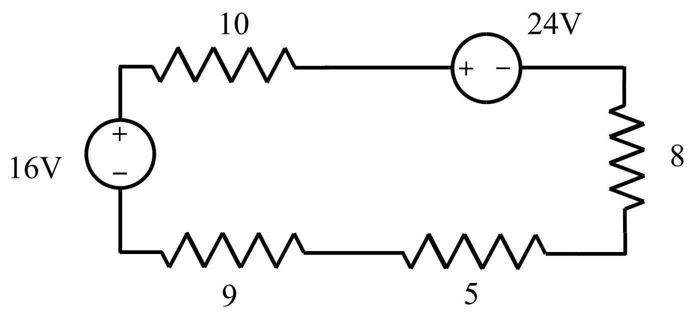
Se deja a cargo del estudiante la resolución del problema para los valores numéricos dados en la fig. 16.

Los dos últimos ejemplos muestran que existen múltiples caminos para resolver un circuito. La experiencia adquirida a través de ejercicios indicará cuál es el método más apropiado para resolver un problema concreto.

Problemas

En todos los problemas, salvo indicación expresa, los valores de las resistencias están en ohmios.

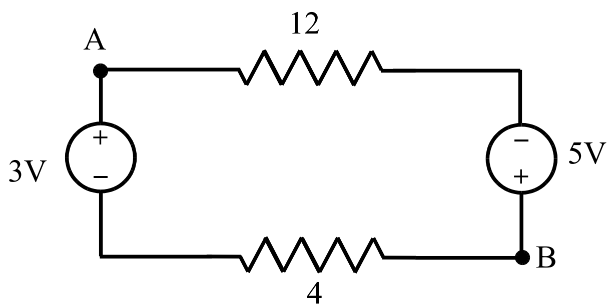
1)



a) Escribir la ecuación de la malla.

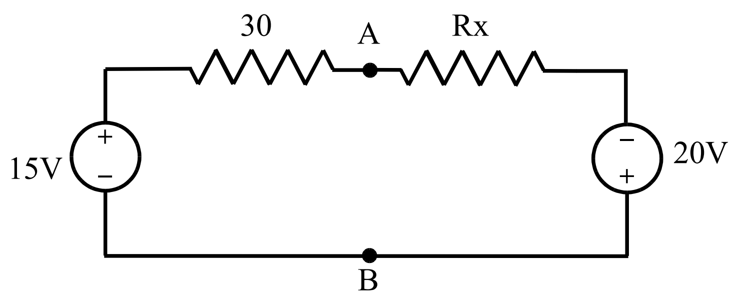
b) Calcular la potencia en cada elemento

2)



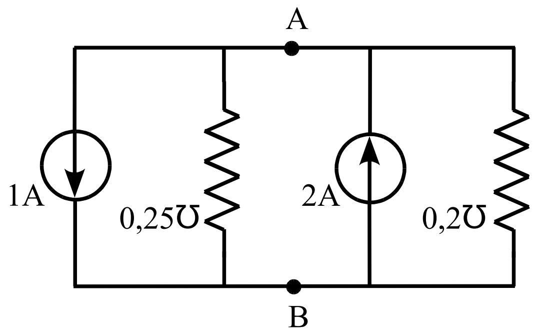
Calcular V_{AB} .

3)



Calcular Rx para que $V_{AB} = 0$.

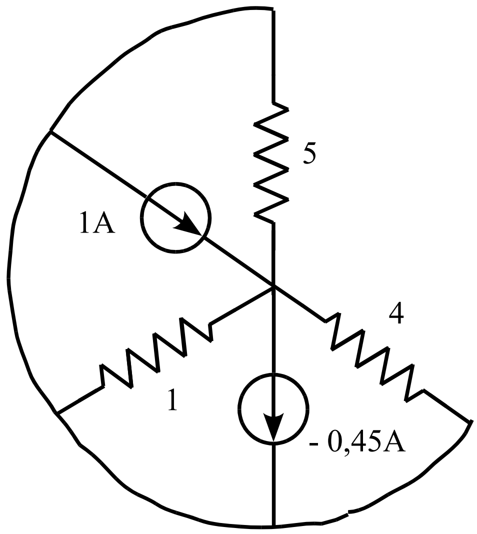
4)



a) Escribir la ecuación del nudo **a**.

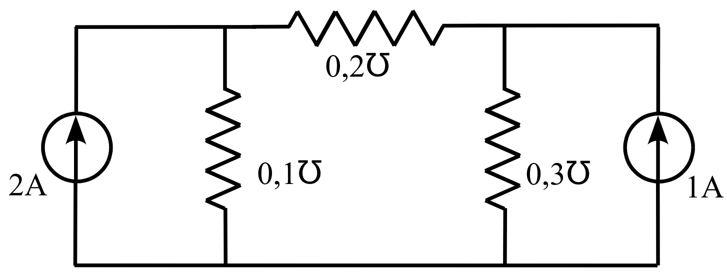
b) Calcular el valor de V_{AB} .

5)



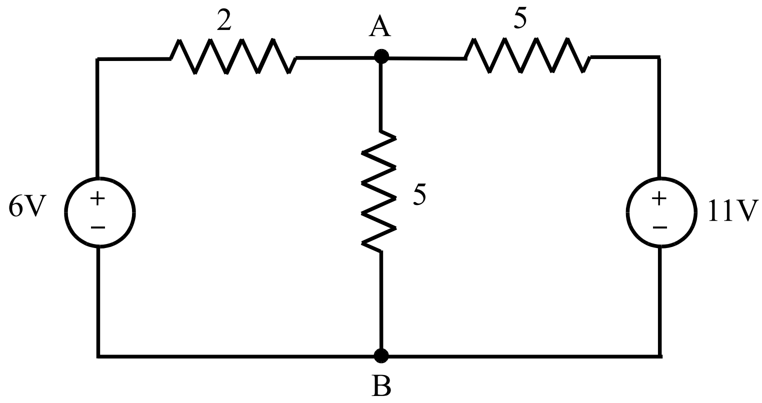
Calcular la corriente en cada resistencia (los valores de las resistencias están en ohmios)

6)



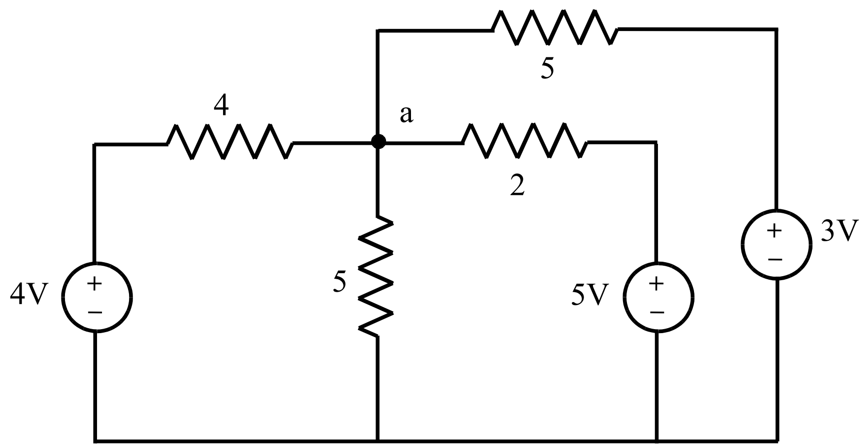
Calcular las corrientes de rama y las tensiones entre pares de nudos.

7)



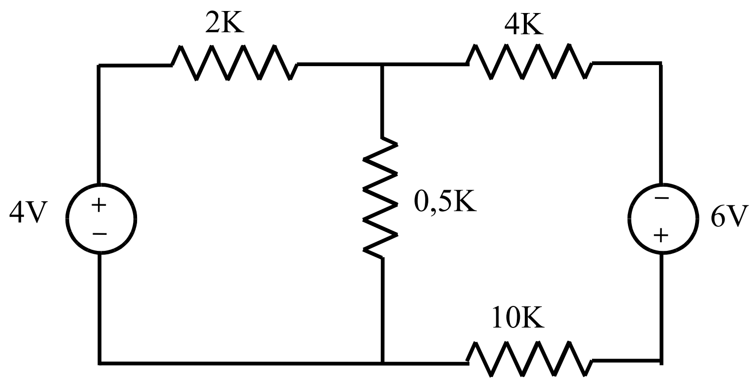
Escribir la ecuación del nudo **A** y calcular V_{AB}.

8)



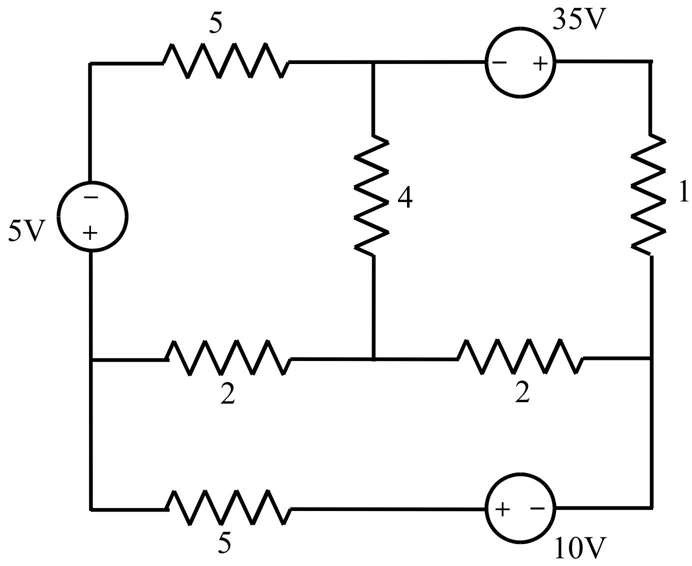
Escribir la ecuación del nudo **a** y calcular la corriente en cada elemento. Verificar que se cumple el balance de potencias.

9)



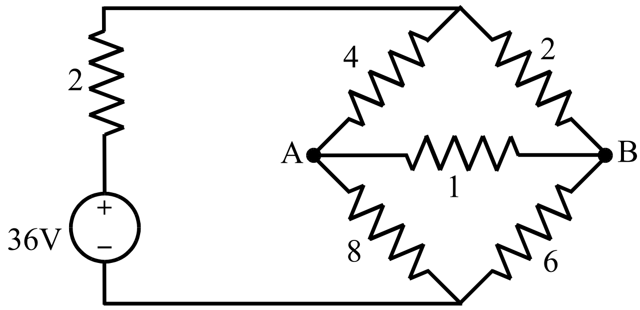
Plantear las ec. de malla y calcular las corrientes en cada elemento.

10)



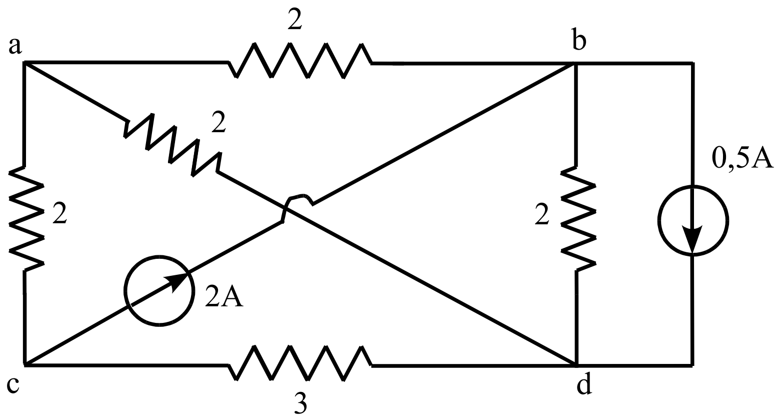
Determinar la corriente de cada rama y hacer el balance de las potencias.

11)



Determinar V_{AB}.

12)



Tomando el nudo **d** como referencia, escribir las euaciones de nudos y resolver el circuito.