

## 14. Acoplamiento magnético

Ing. Juan C. Bonello, Ing. Pedro Castro, Ing. Fernando Ubiría

### 14.1 Necesidad

En algunas aplicaciones es necesario evitar que haya una conexión eléctrica directa entre la fuente de señal y la carga (aislación galvánica).

Esto puede deberse a razones de seguridad como en el caso de la electro-medicina, donde se trabaja con sensores que están en contacto directo con el cuerpo humano. En los sistemas de audio profesionales, la aislación galvánica permite prevenir problemas de ruido debidos a diferencias normales entre los potenciales de tierra de los equipos.

A menudo, las impedancias que la carga y la fuente de señal presentan una a la otra no tienen un valor óptimo para el funcionamiento del circuito. Como veremos más adelante, el acoplamiento magnético permite *transformar* las impedancias del circuito adaptando sus valores de modo conveniente.

### 14.2 Conceptos básicos sobre electromagnetismo

El *magnetismo* es un fenómeno físico que involucra las fuerzas de atracción o repulsión ejercidas por algunos cuerpos llamados imanes sobre otros imanes y sobre las llamadas sustancias *ferromagnéticas*. La causa física del magnetismo de los cuerpos reside en los momentos magnéticos de las partículas elementales.

La zona del espacio donde se ejerce dicha fuerza se llama *campo magnético*. El mismo está especificado en cualquier punto por dos valores: *dirección y magnitud*, tratándose por lo tanto de un *campo vectorial*.

Una *línea de fuerza* es la curva cuya tangente da la dirección del campo en ese punto. Las líneas de fuerza nos permiten esquematizar gráficamente el campo, pero son imaginarias y no tienen presencia física. A los puntos del imán adonde se da la mayor concentración de líneas de fuerza se les llama *polos*.

Un imán tiene un polo *sur* y un polo *norte*, así llamados por la forma en que se alinea la aguja imantada de una brújula con los polos magnéticos de la tierra. Los polos de igual signo se repelen y los de distinto signo se atraen.

Es posible modelar las fuerzas y torques que operan entre dos imanes mediante el modelo de magnetismo de Gilbert. En él se considera que las líneas de fuerza parten del polo norte y terminan en el sur, en forma análoga al modelo del campo eléctrico **E**.

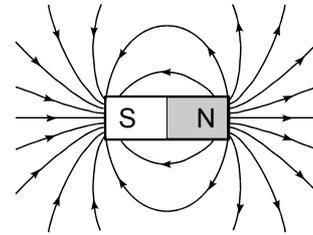


fig. 1

Este campo magnético **H** recibe el nombre de *excitación magnética* y describe cuán intenso es el campo magnético en la región que afecta.

Se denomina *flujo magnético*  $\phi$  al conjunto de las líneas de fuerza, siendo su unidad de medida el Weber<sup>1</sup>.

Se define la *densidad de flujo* **B**, también llamada *inducción magnética*, como la cantidad de líneas de fuerza que atraviesan una unidad de superficie. Su unidad de medida es el Tesla<sup>2</sup>, que equivale a 1 Weber/m<sup>2</sup>.

Si el campo magnético es constante y se quiere calcular el flujo  $\phi$  que atraviesa una superficie plana S, por ser **B** una magnitud vectorial, es necesario tener en cuenta el ángulo que forma dicho vector **B** con la superficie S:

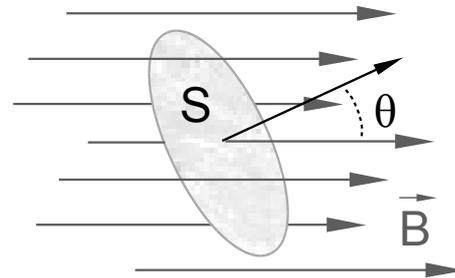


fig. 2

$$\phi = |\mathbf{B}| \cdot S \cos \theta \quad (1)$$

donde  $|\mathbf{B}|$  es la magnitud del campo magnético (densidad de flujo magnético), S es el área de la superficie y  $\theta$  es el ángulo entre las líneas del campo magnético y la perpendicular a la superficie S.

1 Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1891) – Físico alemán

2 Nikola Tesla (1856 – 1943) – Ingeniero serbio

**Fuerza de Lorentz:** Si un campo magnético  $\mathbf{B}$  ejerce su acción en una región del espacio y por la misma se desplaza una carga eléctrica puntual de valor ( $q$ ) a una velocidad  $\mathbf{v}$ , dicha carga experimentará los efectos de una fuerza  $\mathbf{F}$  que será perpendicular y proporcional tanto a la velocidad  $\mathbf{v}$  como al campo  $\mathbf{B}$ . Por ser ambas magnitudes vectoriales,  $\mathbf{F}$  será proporcional al producto vectorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

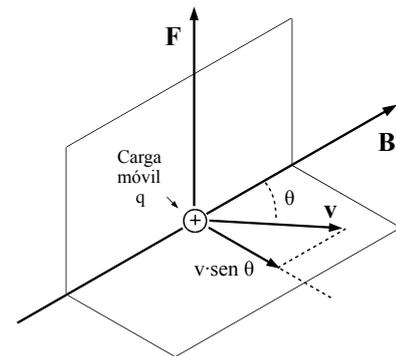


fig. 3

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{F}| = q \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (2)$$

Es de hacer notar que si la carga se mueve en la dirección del campo magnético, el campo no ejercerá fuerza sobre ella.

### Efectos magnéticos de la corriente eléctrica

Una carga eléctrica en movimiento crea un campo magnético en el espacio que la rodea. Hans Oersted descubrió en 1820 que una corriente eléctrica que fluye a través de un conductor, tiende a hacer girar la aguja de una brújula situada en sus cercanías hacia una posición perpendicular al mismo. Experiencias posteriores llevadas a cabo por Biot, Savart y Ampere, condujeron a una ecuación que permite calcular la densidad de flujo en cualquier punto del espacio que rodea a un circuito por el cual circula una corriente constante.

Si consideramos que el circuito está dividido en elementos infinitesimales, las cargas móviles de cada uno de estos elementos crearán un campo en todos los puntos del espacio, siendo el campo en cualquier punto el resultante de los campos infinitesimales creados en ese punto por todos los elementos del circuito. La fig. 4 representa el campo infinitesimal  $d\mathbf{B}$  creado por el elemento  $d\mathbf{l}$  en el punto P, situado a una distancia  $r$ . El vector  $d\mathbf{B}$  se encuentra en un plano perpendicular a  $d\mathbf{l}$  y es perpendicular al plano determinado por  $d\mathbf{l}$  y P.

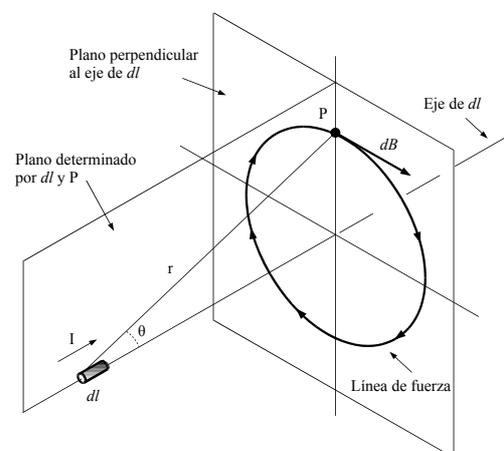


fig. 4

Se deduce por lo tanto que una corriente eléctrica que fluye a través de un conductor produce un campo magnético circular (sin polos).

El sentido de las líneas de fuerza es el sentido de giro de un tirabuzón que entre en el sentido de la corriente, fig. 5.

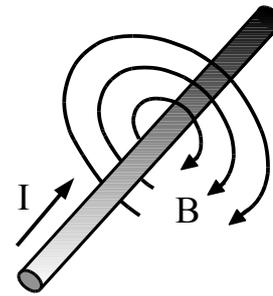


fig. 5

El valor de  $dB$  viene dado por la Ley de Biot, ec. (3), siendo  $\mu_0$  una constante que se conoce como permeabilidad del vacío

La densidad de flujo B resultante en cualquier punto del espacio debida al circuito completo, se obtiene mediante la suma geométrica de los vectores  $dB$ , la cual se obtiene integrando la ec. (3) a lo largo de todo el circuito, ec. (4)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{r^2} \quad (3)$$

donde  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$   
 $\Rightarrow \mu_0 \approx 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{r^2} \quad (4)$$

**Campo magnético de una espira circular**

En la fig. 6 vemos una espira circular de radio R situada sobre el plano yz, la cual transporta una corriente de intensidad I.

El punto P está sobre el eje de la espira a una distancia s de su centro O y r es la distancia de un segmento de la espira de longitud dl al punto P.

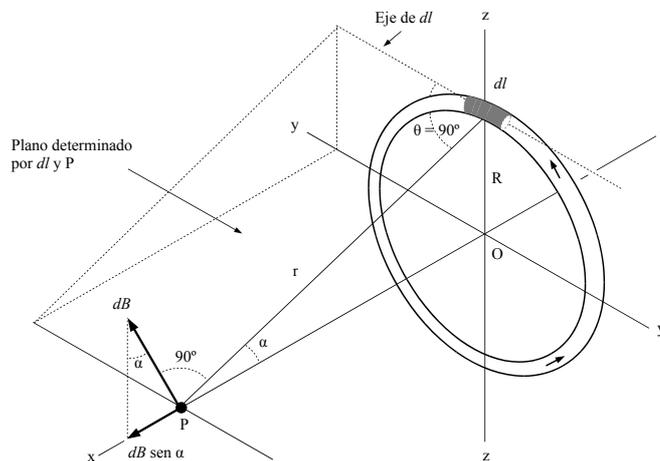


fig. 6

La densidad de flujo magnético  $dB$  creada en el punto P por la corriente I que circula por el segmento dl se encuentra en el plano xz y se calcula mediante la ley de Biot, valiendo  $\theta$  en este caso  $90^\circ$  :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2}$$

Si  $\alpha$  es el ángulo formado por  $r$  y el eje  $x$ , el vector  $d\mathbf{B}$  puede descomponerse en una componente paralela al eje  $x$ ,  $dB \cdot \sin \alpha$  y otra perpendicular al mismo  $dB \cdot \cos \alpha$ . Debido a la simetría de la espira, las componentes  $dB \cdot \cos \alpha$  creadas por los segmentos opuestos de la misma se anulan entre sí.

La densidad de flujo magnético total  $B$  está orientada según el eje  $x$  y su módulo se calcula integrando  $dB$ .

$$B = \int dB \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I \cdot R \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

Si en cambio consideramos un punto que no se encuentre sobre el eje de la espira, las componentes  $dB \cdot \cos \alpha$  no se anularán y su diferencia variará con la posición del punto.

En la fig. 7 se puede ver una vista lateral de la espira y algunas de las líneas de fuerza que la rodean y que se encuentran en un plano que pasa por el eje.

El campo tiene en realidad tres dimensiones y cada línea de fuerza es una curva cerrada.

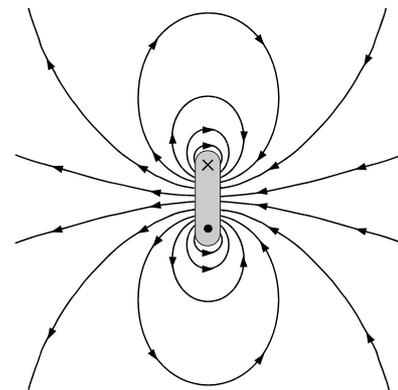


fig. 7

**Solenoides**

Si se arrolla un conductor en forma helicoidal, los campos magnéticos de las espiras se refuerzan mutuamente, obteniéndose en consecuencia dos puntos de mayor concentración de líneas de fuerza, fig. 8.

Esta construcción, llamada *solenoides* o *bobina*, tiene polos Norte y Sur y se comporta como un imán de barra.

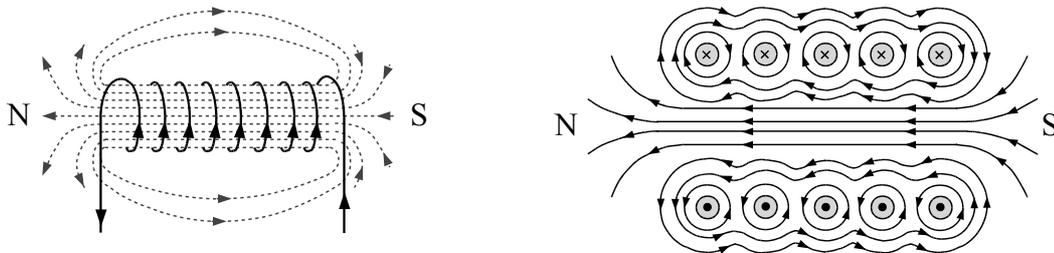


fig. 8

*Regla de la mano derecha:* Si se colocan los dedos tendidos sobre el conductor de modo que la corriente entre por la muñeca y salga por la punta de los dedos, el pulgar extendido señalará el polo Norte.

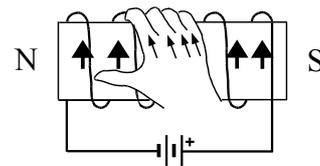


fig. 9

La densidad de flujo producida en cualquier punto por la corriente que circula por el solenoide, es la resultante de las densidades de flujo creadas en dicho punto por cada espira del solenoide. Partiendo de la ec. (4) se puede demostrar que en cualquier punto del eje del solenoide, o próximo a él y no demasiado cerca de los extremos, la densidad de flujo  $B$  estará dada por la ec. (5), siendo  $N$  el número de espiras y  $l$  la longitud del solenoide.

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \quad (5)$$

En el vacío,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son proporcionales entre sí, siendo la relación entre ambos la constante  $\mu_0$ .

$$B = \mu_0 \cdot H \quad (6)$$

De esta relación se desprende que la unidad de  $H$  es Amper-vuelta por metro.

### Propiedades magnéticas de la materia

Todas las sustancias se ven afectadas por la presencia de un campo magnético. Las llamadas *sustancias diamagnéticas* son repelidas por el campo magnético y tienden a desplazarse hacia el lugar donde el campo es más débil. En cambio, las *sustancias paramagnéticas* son empujadas a entrar en la región de máxima intensidad del campo. Las *sustancias ferromagnéticas*, que son el hierro y algunas pocas sustancias más, se ven atraídas muy fuertemente hacia el lugar adónde el campo magnético es más fuerte. Si las sustancias ferromagnéticas son calentadas por encima de una cierta temperatura llamada *temperatura de Curie*, propia de cada sustancia, se comportan como las sustancias paramagnéticas.

### Permeabilidad magnética

Supongamos ahora que encorvamos un solenoide hasta que sus extremos se toquen y tome una forma circular, formando un *toroide*, fig. 10. Prácticamente todo el flujo magnético se encuentra confinado en su interior y la densidad de flujo en cualquier punto del arrollamiento está también dada por la ec. (5). En este caso,  $l$  representa la longitud de la circunferencia media del toroide.

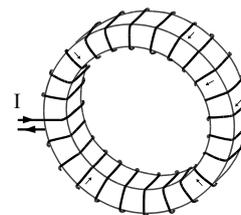


fig. 10

Este hecho se aprovecha para investigar las propiedades magnéticas de la materia. Se da a la muestra de material forma de anillo<sup>1</sup> y se arrolla sobre su superficie el hilo conductor. Este devanado se llama *arrollamiento magnetizante* y la corriente que lo recorre es la *corriente magnetizante*. Se coloca además un segundo arrollamiento sobre el anillo, conectado a un galvanómetro balístico.

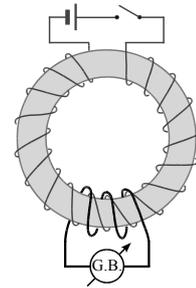


fig. 11

La densidad de flujo dentro del anillo se mide cortando abruptamente la corriente magnetizante, la desviación del galvanómetro será proporcional a B.

En un arrollamiento toroidal *en el vacío*, la densidad de flujo magnético  $B_0$  está dada por:

$$B_0 = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \quad (7)$$

Cuando el núcleo es de una sustancia ferromagnética el valor de B es muchísimo mayor. Si es de una sustancia paramagnética será ligeramente mayor y si es de una sustancia diamagnética será algo menor que en el vacío.

Si representamos por B la densidad de flujo dentro de un anillo del material en cuestión y  $B_0$  es la densidad de flujo dentro de un anillo en el vacío, la razón  $B/B_0$  se denomina *permeabilidad relativa*  $K_m$  de la sustancia.

$$K_m = \frac{B}{B_0} \quad (8)$$

Sustituyendo el valor de  $B_0$  obtenemos:

El producto  $K_m \cdot \mu_0$  se denomina *permeabilidad magnética* de la sustancia y se representa por  $\mu$ ,

$$B = K_m \cdot \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \quad (9)$$

igual a  $\mu_0$  para el vacío

siendo  $\mu$  : ligeramente mayor que  $\mu_0$  para las sustancias paramagnéticas  
ligeramente menor que  $\mu_0$  para las sustancias diamagnéticas  
mucho mayor que  $\mu_0$  para las sustancias ferromagnéticas

Por lo tanto, la densidad de flujo magnético en una muestra de sustancia en forma de anillo de Rowland es:

$$B = \mu \frac{N \cdot I}{l} \quad (10)$$

<sup>1</sup> Anillo de Rowland

El flujo magnético  $\phi$  se relaciona con  $\mathbf{B}$  mediante la ec. (1). Por tratarse de un anillo, las líneas de fuerza que lo recorren son perpendiculares a la sección, en consecuencia  $\cos \theta = 1$  y  $\phi = B \cdot S$

Sustituyendo el valor de B en la ec. (10) y reordenándola, obtenemos la ec. (11):

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{l}{\mu \cdot S}} = \frac{F}{R} \quad (11)$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la Ley de Ohm. El producto  $N \cdot I$  se llama *Fuerza Magnetomotriz*, se simboliza con la letra  $F$  y su unidad es el Amper-vuelta. El denominador se llama *Reluctancia*, es proporcional al camino recorrido por el flujo magnético e inversamente proporcional a la sección transversal del material por el que pasa dicho flujo. Se simboliza con la letra  $R$  y su unidad es el Amper-vuelta/Weber. Esta ecuación es válida para todos los circuitos magnéticos, pero en la mayoría de los casos es difícil determinar teóricamente el valor de la Reluctancia.

### Magnetización de los cuerpos ferromagnéticos

La densidad de flujo en un anillo de Rowland con núcleo de material ferromagnético, puede ser cientos o hasta miles de veces mayor que la presente en un anillo igual, recorrido por una corriente de igual magnitud, pero bobinado sobre aire. Para estudiar este fenómeno, se trazan empíricamente gráficas de la densidad de flujo  $B$  en función de la excitación magnética  $H$ , la cual se puede variar fácilmente variando la corriente magnetizante  $I$  que circula por el devanado. Estas gráficas se llaman *curvas de magnetización*. Así se encontró que la relación entre  $H$  y  $B$  no es constante, o dicho en otras palabras, que la permeabilidad  $\mu$  varía con la densidad de flujo magnético.

En la fig. (12) vemos que a altas densidades de flujo magnético  $B$ , para lograr un mismo  $\Delta B$  se requiere un aumento de la excitación magnética  $H$  mucho mayor que a bajas densidades. Este efecto se llama *saturación* y es debido a una disminución de  $\mu$  para valores grandes de  $B$ . La saturación tiene lugar en todos los materiales magnéticos excepto el aire, por lo tanto los circuitos magnéticos no son lineales.

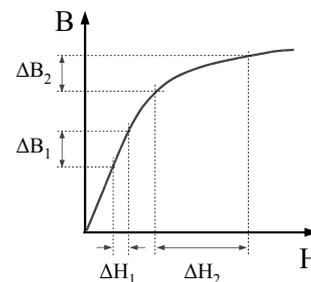


fig. 12

Esto produce una distorsión y por ello los circuitos equivalentes son válidos solo cuando la señal no es muy grande, de modo que  $\mu$  se mantenga aceptablemente

constante. Las curvas de magnetización dependen de la composición del metal, su forma y temperatura.

### Histéresis

Si tenemos un solenoide devanado sobre un núcleo ferromagnético y recorrido por una corriente  $I$ , tan pronto como cortemos dicha corriente desaparecerá la excitación magnética  $H$ . Sin embargo, el núcleo conservará una cierta densidad de flujo llamada *magnetismo remanente*.

En la fig. (13) podemos ver el proceso en un núcleo ferromagnético que nunca ha sido magnetizado: Aumentando desde 0 la corriente eléctrica  $I$ , aumentamos también  $H$  y la densidad de flujo  $B$  también crecerá, trayecto 0 - 1.

Si reducimos  $H$  también se reduce  $B$ , pero con cierto retardo con respecto a  $H$ . Así, para  $H = 0$  habrá un cierto magnetismo remanente  $B_r$ .

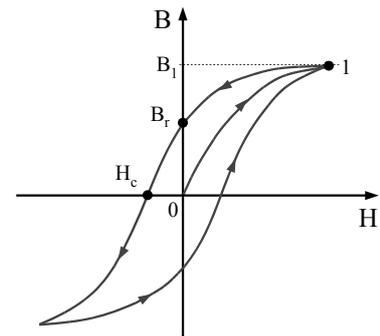


fig. 13

Si se desea desmagnetizar el núcleo es necesario invertir la corriente en el devanado, invirtiendo en consecuencia el sentido de las líneas magnéticas. Cuando la excitación magnética alcance el punto  $H_c$ ,  $B$  será 0. A este valor  $H_c$  del campo  $H$  se le llama *fuerza coercitiva* y es una característica del material.

Repetiendo el proceso de magnetización en sentido contrario, se obtiene la curva cerrada de la fig. (13), llamada *ciclo de Histéresis*.

La remagnetización del material está ligada a la disipación de cierta cantidad de energía, que se desprende en forma de calor. A fin de reducir las pérdidas de energía y la distorsión, el núcleo de un transformador debe tener un ciclo de histéresis lo más angosto posible, cosas que se logra mediante aleaciones. En cambio, si lo que se desea es un imán permanente, el ciclo de histéresis debe ser lo más ancho posible

### Corrientes parásitas

En todo núcleo sometido a un campo magnético variable circulan corrientes parásitas que calientan el núcleo y disipan energía (corrientes de Foucault). Este efecto es utilizado en los crisoles magnéticos, pero es indeseable en un transformador. Para reducir este efecto, se laminan los núcleos y se aíslan las

chapas entre sí, reduciendo la corriente. El óxido de silicio es un gran aislante y se aprovecha el propio óxido del núcleo. Para radiofrecuencia, se pulveriza el material magnético y se lo amalgama con cerámica, obteniéndose el ferrite.

### Inducción Electromagnética

Históricamente, la **Ley de Inducción Electromagnética de Faraday** (o simplemente **Ley de Faraday**) fue al principio una ley empírica.

Ella establece que, dado un circuito cerrado inmóvil  $C$  sometido a un flujo magnético  $\Phi$  variable en el tiempo, la tensión  $\varepsilon$  inducida en el circuito es igual a la rapidez con que cambia el flujo magnético que atraviesa la superficie  $S$  que tiene a ese circuito como borde. El signo de  $-$  indica el sentido de la tensión inducida, que de acuerdo a la Ley de Lenz se opone a la causa que la genera.

Sí en lugar de tratarse de una única espira, el circuito es un inductor compuesto por  $N$  espiras y el flujo  $\Phi$  varía de igual forma a través de cada una de ellas, la tensión total inducida estará dada por la ec. (13):

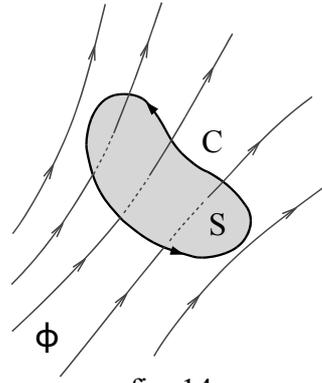


fig. 14

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (12)$$

$$\varepsilon = - N \frac{d\Phi}{dt} \quad (13)$$

### Autoinducción

Si un solenoide es recorrido por una corriente variable, la misma generará un campo magnético variable y de acuerdo a la Ley de Faraday se inducirá en el propio inductor una tensión. La variación de flujo se calcula derivando la ec. (11) de los circuitos magnéticos:

$$d\Phi = \frac{N \cdot dI}{R} \quad (14)$$

Sustituyendo la ec. (14) en la fórmula de la Ley de Faraday, ec. (13), la tensión autoinducida  $\varepsilon$  es:

$$\varepsilon = - \frac{N^2}{R} \cdot \frac{dI}{dt} \quad (15)$$

Para que pueda circular corriente a través del devanado, es necesario aplicar entre los bornes del solenoide una tensión  $v$  de igual valor pero de signo contrario, ec. (16), donde  $L$  es la *autoinducción* del solenoide medida en Henry.

$$v = \frac{N^2}{R} \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (16)$$

Debido a las dificultades para determinar teóricamente la Reluctancia, los inductores se construyen de acuerdo a tablas obtenidas empíricamente y de ser

necesario, se los ajusta mediante un núcleo movable.

**Inducción mutua**

Si tenemos dos arrollamientos devanados sobre un mismo núcleo y uno de ellos es recorrido por una corriente variable, el flujo magnético variable que ésta genera inducirá una tensión sobre el otro devanado. A este fenómeno se lo llama *Inducción mutua*. Se dice que entre el circuito que entrega energía, llamado *primario* y el que absorbe energía llamado *secundario* hay un *acoplamiento magnético*, debido al flujo magnético del primario que corta al secundario. En general, no todo el flujo  $\phi_1$  creado por el primario corta al secundario. Se llama *coeficiente de acoplamiento*  $k$  al cociente entre ambos flujos, el cual en un caso ideal valdría 1. Según la Ley de Faraday, en el secundario se inducirá la tensión  $v_2$ , ec.(18):

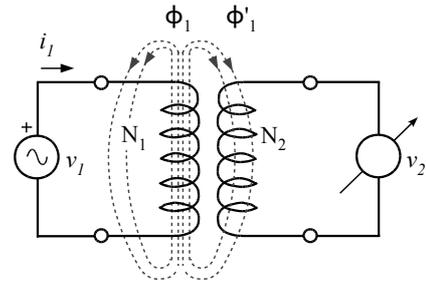


fig. 15

$$k = \frac{\phi'_1}{\phi_1} \leq 1 \quad (17)$$

$$v_2 = N_2 \frac{k \cdot d\phi_1}{dt} \quad (18)$$

Sustituyendo en ella el valor de  $\phi_1$  :

$$\phi_1 = \frac{N_1 \cdot i_1}{R} \Rightarrow v_2 = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot k}{R} \cdot \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (19)$$

Definiremos el *Coefficiente de inducción mutua*  $M$  como el coeficiente que relaciona la velocidad de variación de corriente de una bobina con la tensión inducida en otra bobina sumergida en el campo magnético de la primera. Este coeficiente se mide en Henrys.

Si ambas bobinas comparten el mismo circuito magnético, elevamos al cuadrado la expresión de  $M$  y la separamos en factores, obteniendo así  $M$  en función de las inductancias del primario  $L_1$  y del secundario  $L_2$

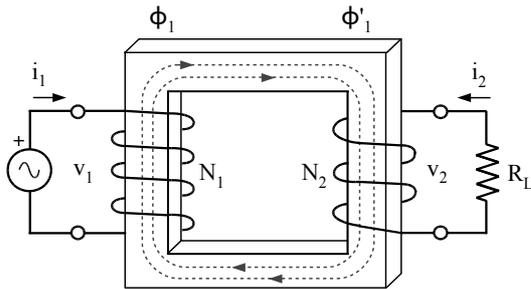
$$M^2 = \frac{N_1^2 \cdot N_2^2 \cdot k^2}{R^2} = \frac{N_1^2}{R} \cdot \frac{N_2^2}{R} \cdot k^2 = L_1 \cdot L_2 \cdot k^2 \Rightarrow M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (20)$$

### 14.3 Circuitos acoplados

Podemos definir al *transformador* como un cuadripolo cuyos circuitos de entrada y salida están acoplados inductivamente.

Consideraremos primero un transformador *ideal*, en el cual :

- i)  $k = 1 \Rightarrow \phi_1 = \phi'_1$
- ii) No hay pérdida de energía  $\Rightarrow \eta = 100\%$



$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{N_1 \cdot i_1}{R} \\ \Phi'_1 &= \frac{N_2 \cdot i_2}{R} \end{aligned} \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

fig. 16

Como la carga  $R_L$  es una resistencia óhmica pura, la tensión  $v_2$  está en fase con la corriente  $i_2$ . Además, por ser  $\eta = 100\%$ , la potencia en los circuitos de entrada y de salida es igual. No puede haber entonces potencia reactiva en el primario y la tensión  $v_1$  está en fase con la corriente  $i_1$ , por lo cual:

$$P_{in} = P_o \Rightarrow v_1 \cdot i_1 = v_2 \cdot i_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

El transformador es un excelente *adaptador de impedancias*:

- i) Los circuitos de entrada y salida están aislados para la componente continua
- ii) La impedancia de entrada  $Z_{in}$  es función directa de la impedancia de carga
- iii) Su rendimiento real es cercano al 100% y además no requiere potencia de polarización.

La impedancia de entrada es entonces el producto de la carga por el cuadrado del cociente entre el número de espiras del primario y del secundario. Por ser el

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_2 \left( \frac{N_1}{N_2} \right)}{i_2 \left( \frac{N_2}{N_1} \right)} = \frac{v_2}{i_2} \cdot \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{L_1}{L_2} R_L \quad (21)$$

transformador ideal, el circuito magnético de primario y secundario es el mismo y tienen la misma Reluctancia, lo cual permite sustituir el cociente por  $L_1/L_2$ .

Si desconectamos la  $R_L$ ,  $Z_{in}$  tiende a infinito, lo cual requiere que  $L_1 = \infty$ . Pero, como a su vez el cociente  $L_1/L_2$  debe ser finito, se debe cumplir también que  $L_2 = \infty$ . De esto se deduce, que en un transformador *ideal* las inductancias del primario y del secundario son infinitas.

### 14.3.1 Circuito equivalente del transformador

Para poder estudiar el comportamiento del transformador como elemento de circuito, debemos construir un modelo equivalente del mismo. Partiendo de la definición de los parámetros  $Z$ , las expresiones para  $Z_{11}$  y  $Z_{22}$  son simplemente la suma de las componentes resistiva e inductiva de ambos bobinados:

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} \Rightarrow Z_{11} = R_p + j\omega L_p \quad z_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} \Rightarrow Z_{22} = R_s + j\omega L_s$$

Si se deja el secundario en circuito abierto y se hace circular por el primario una corriente  $i_1 = I_1 \sin(\omega t)$  tendremos en el secundario:

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} = M \omega I_1 \cos(\omega t) = j\omega M \cdot I_1 \sin(\omega t)$$

Se puede hacer un razonamiento similar dejando en circuito abierto el primario. Sustituyendo en las definiciones de  $Z_{21}$  y  $Z_{12}$  obtenemos:

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \Rightarrow Z_{21} = j\omega M \quad z_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} \Rightarrow Z_{12} = j\omega M$$

De estas expresiones de los parámetros  $Z$  del transformador, resulta el circuito equivalente en T de la fig. 17.

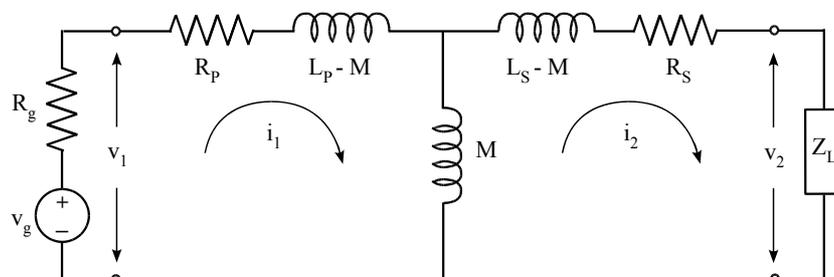


fig. 17

Excepto por el hecho de no incluir la separación galvánica entre primario y secundario, este modelo equivalente se comporta como el transformador original.

Vamos ahora a calcular su impedancia de entrada  $Z_{in}$  y a compararla, como ejercicio, con la del transformador ideal, ec. (21). Sus ecuaciones de malla, usando los parámetros  $Z$  para simplificar la notación son:

$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} \cdot i_1 - Z_{12} \cdot i_2 \\ 0 = -Z_{21} \cdot i_1 + (Z_{22} + Z_L) i_2 \end{cases} \Rightarrow i_1 = \frac{v_1 (Z_{22} + Z_L)}{Z_{11} (Z_{22} + Z_L) - Z_{21} Z_{12}}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = Z_{11} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{22} + Z_L} = R_p + j\omega L_p + \frac{\omega^2 M^2}{R_s + j\omega L_s + Z_L} \quad (22)$$

La ec. (22) es una expresión exacta a la cual, en el caso de los transformadores con núcleo de hierro para audiofrecuencias, se le pueden hacer varias aproximaciones:

- i) Usualmente  $j\omega L_s \gg$  parte reactiva de  $Z_L$
- ii) Por la ec.(20)  $M^2 = k^2 \cdot L_p \cdot L_s$ , si  $k \approx 1 \Rightarrow M^2 \approx L_p \cdot L_s$

$$\Rightarrow Z_{in} \approx R_p + j\omega L_p + \frac{\omega L_p \omega L_s}{R_s + R_L + j\omega L_s}$$

Multiplicando por la conjugada

$$\Rightarrow Z_{in} \approx R_p + j\omega L_p + \frac{\omega L_p \omega L_s (R_s + R_L) - j\omega L_p \omega^2 L_s^2}{(R_s + R_L)^2 + \omega^2 L_s^2}$$

- iii) Usualmente  $(R_s + R_L) \ll \omega L_s$ ,  
podemos despreciarlo y simplificar:
- $$\Rightarrow Z_{in} \approx R_p + \frac{L_p}{L_s} (R_s + R_L)$$

- iv) Usualmente  $\frac{L_p}{L_s} (R_s + R_L) \gg R_p$  y  $R_L \gg R_s \Rightarrow Z_{in} \approx \frac{L_p}{L_s} R_L = \frac{N_1^2}{N_2^2} R_L$

Vemos que en condiciones ideales, nuestro modelo se comporta como el transformador ideal ya estudiado. La ventaja de nuestro modelo radica en que se aproxima mejor a la realidad, una representación más completa debería incluir también las capacidades parásitas presentes. En aquellos casos particulares en que alguna de estas aproximaciones no sea válida, se puede recurrir a la ec. (22).

14.3.2 Análisis de la respuesta de frecuencia

Vamos ahora a realizar una transformación del circuito equivalente que lo hace más cómodo para el análisis. Primeramente multiplicamos numerador y denominador del 2o miembro de la ec. (22) por  $a^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\Rightarrow Z_{in} = Z_{11} - \frac{a^2 Z_{21} Z_{12}}{a^2(Z_{22} + Z_L)} = R_p + j\omega L_p + \frac{a^2 \omega^2 M^2}{a^2(R_s + j\omega L_s) + a^2 Z_L} \quad (23)$$

La fig. 18 muestra el circuito equivalente referido al primario que se desprende de la ec. (23).

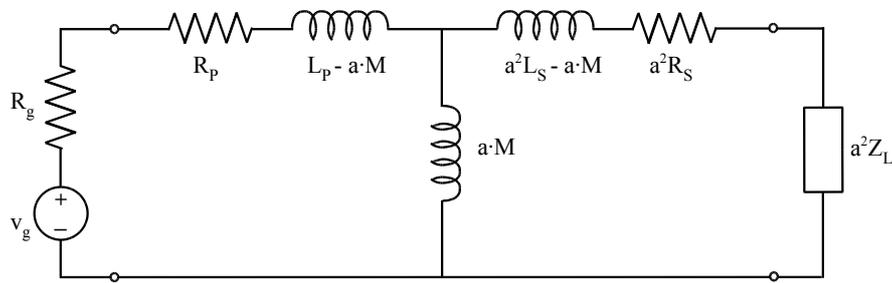


fig. 18

Podemos elegir en principio cualquier valor para  $a \in \mathbb{R}$ , entre ellos aquel valor para el cual se cumpla que  $a^2 L_s - aM = 0$

$$a = \frac{M \pm \sqrt{M^2}}{2 L_s} \Rightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ a'' = \frac{M}{L_s} \end{cases}$$

Sustituyendo luego en  $a''$  el dividendo  $M$  por la ec. (20), obtenemos la ec.(24):

$$a = \frac{k \sqrt{L_p}}{\sqrt{L_s}} = k \frac{N_1}{N_2} \quad (24)$$

En los transformadores para audiofrecuencias,  $k$  difiere muy poco de la unidad y por lo tanto:

$$k \approx 1 \Rightarrow a \approx \frac{\sqrt{L_p}}{\sqrt{L_s}}$$

Sustituyendo este valor aproximado de  $a$  en las expresiones de los componentes del circuito equivalente de la fig. 18 y operando, se obtiene el circuito equivalente de la fig. 19

$$L_p - a \cdot M = L_p(1 - k)$$

$$a \cdot M = k \cdot L_p$$

$$a^2 L_s - a \cdot M = L_p(1 - k)$$

Las inductancias en serie  $L_p(1-k)$  representan a la conversión de energía en flujo disperso y se llaman *inductancias de dispersión*.

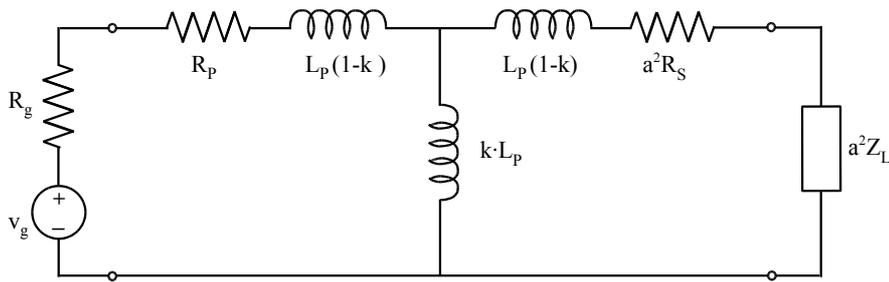


fig. 19

En audiofrecuencias, la carga  $Z_L$  suele ser resistiva pura.

Con un transformador bien construido, se pueden despreciar la inductancia de magnetización que es muy grande y las capacidades distribuidas. Además, se puede asumir que  $R_p$  es mucho menor que la resistencia reflejada por la carga en el primario y que  $R_s \ll R_L$ .

La inductancia de dispersión  $L_p(1-k)$  limitará la respuesta en alta frecuencia y debería ser lo más pequeña posible, en tanto que la respuesta en baja frecuencia se verá afectada por la inductancia  $k \cdot L_p$ , la cual debería ser lo más grande posible. Por eso, dentro del margen de frecuencias de trabajo se debería cumplir:

$$2\omega L_p(1-k) \ll a^2 R_L \ll \omega k L_p$$

Estas dos desigualdades sólo se pueden satisfacer haciendo  $k \approx 1$ , en ese caso se lo puede reemplazar por 1 en la rama  $k \cdot L_p$  pero no en la inductancia  $L_p(1-k)$ .

Así, el modelo se puede simplificar y el circuito equivalente general del transformador para audiofrecuencias será el de la fig. 20 :

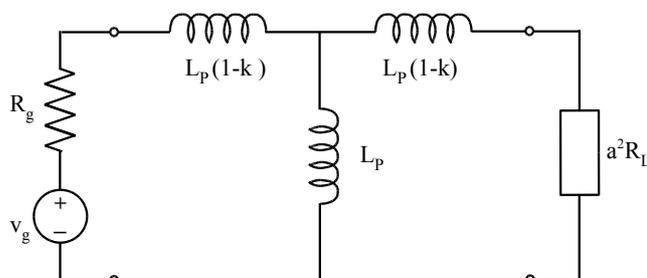


fig. 20

**Análisis para frecuencias medias**

En la banda de frecuencias medias se puede suponer como despreciable el efecto de todas las componentes reactivas, dando como resultado el circuito de la fig. 21.

La potencia transferida a la carga está dada en el caso general por la ec. (25)

En el caso de un transformador *ideal*, si la relación de transformación se fijase de modo de obtener la máxima transferencia de potencia,  $R_g$  debería ser igual a  $a^2 R_L$  y la potencia transferida sería:

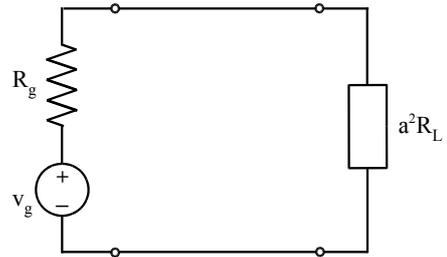


fig. 21

$$P_{oM} = \frac{v_g^2 \cdot a^2 R_L}{(R_g + a^2 R_L)^2} \quad (25)$$

$$\text{si } R_g = a^2 R_L, \quad P_{oM} = \frac{v_g^2}{4 \cdot R_g}$$

**Análisis para frecuencias bajas**

En la banda de frecuencias bajas, la corriente que circula a través de  $L_p$  es significativa y debe ser tomada en cuenta. Téngase presente que en el circuito equivalente de la fig. 22, la carga  $R_L$  está representada por su impedancia reflejada hacia el primario  $a^2 R_L$  y que por lo tanto la corriente que la atraviesa es  $I_2/a$ .

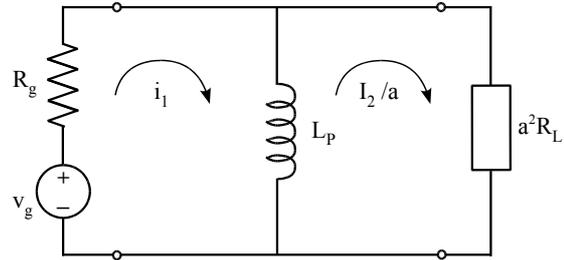


fig. 22

$$\begin{cases} v_g = i_1(R_g + j\omega L_p) - \frac{i_2}{a} j\omega L_p \\ 0 = -i_1 j\omega L_p + \frac{i_2}{a} (a^2 R_L + j\omega L_p) \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{i_2}{a} \right| = \frac{v_g \omega L_p}{\sqrt{(a^2 R_L \cdot R_g)^2 + [\omega L_p (R_g + a^2 R_L)]^2}}$$

$$P_{oB} = \left| \frac{i_2}{a} \right|^2 a^2 R_L = \frac{v_g^2 (\omega L_p)^2 a^2 R_L}{(a^2 R_L \cdot R_g)^2 + [\omega L_p (R_g + a^2 R_L)]^2}$$

A la frecuencia de corte  $f_1$ , la potencia entregada a la carga será la mitad (- 3 dB) que a frecuencias medias. Haciendo el cociente, podemos determinar  $f_1$  :

$$\frac{P_{oB}}{P_{oM}} = \frac{1}{2} = \frac{(\omega_1 L_p)^2 (R_g + a^2 R_L)^2}{(a^2 R_L \cdot R_g)^2 + [\omega_1 L_p (R_g + a^2 R_L)]^2} \Rightarrow \omega_1 L_p = \frac{R_g \cdot a^2 R_L}{R_g + a^2 R_L} \quad (26)$$

**Análisis para frecuencias altas**

En la banda de frecuencias altas, la caída de tensión sobre la inductancia de dispersión  $L_p \cdot (1-k)$  es significativa y debe ser tomada en cuenta, fig. 23.

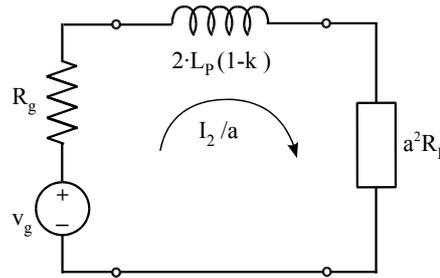


fig. 23

$$\left| \frac{i_2}{a} \right| = \frac{v_g}{\sqrt{(R_g + a^2 R_L)^2 + [2 \omega L_p(1-k)]^2}}$$

$$P_{oA} = \left| \frac{i_2}{a} \right|^2 a^2 R_L = \frac{v_g^2 a^2 R_L}{(R_g + a^2 R_L)^2 + [2 \omega L_p(1-k)]^2}$$

A la frecuencia de corte  $f_2$ , la potencia entregada a la carga será la mitad (- 3 dB) que a frecuencias medias. Haciendo el cociente, podemos determinar  $f_2$  :

$$\frac{P_{oA}}{P_{oM}} = \frac{1}{2} = \frac{(R_g + a^2 R_L)^2}{(R_g + a^2 R_L)^2 + [2 \omega_2 L_p(1-k)]^2} \Rightarrow 2 \omega_2 L_p(1-k) = R_g + a^2 R_L \quad (27)$$

**Coefficiente de acoplamiento k**

Para determinar el valor del coeficiente de acoplamiento que permite satisfacer dos frecuencias de corte prefijadas, basta con sustituir la ec. (27) en el denominador de la ec. (26) y operar:

$$\omega_1 L_p = \frac{R_g \cdot a^2 R_L}{2 \omega_2 L_p(1-k)} \Rightarrow k = 1 - \frac{R_g \cdot a^2 R_L}{2 \omega_1 \omega_2 L_p^2} \quad (28)$$

**Ejemplo**

Se desea adaptar mediante un transformador una carga de  $5400 \Omega$  a un generador cuya  $R_g = 600 \Omega$  para obtener una máxima transferencia de potencia.

Las frecuencias de corte de - 3 dB son  $f_1 = 30 \text{ Hz}$  y  $f_2 = 15 \text{ kHz}$ .

i) Determinar la relación de transformación  $a$

ii) Estimar los valores de  $L_p$  y  $k$ .

$$\text{Para max. transf. de potencia } R_g = a^2 R_L \Rightarrow a = \sqrt{\frac{R_g}{R_L}} = \sqrt{\frac{600 \Omega}{5400 \Omega}} = \frac{1}{3}$$

$$L_p = \frac{R_g \cdot a^2 R_L}{\omega_1 (R_g + a^2 R_L)} = \frac{600 \Omega \cdot 600 \Omega}{2 \pi 30 \text{ Hz} (600 \Omega + 600 \Omega)} = 1,59 \text{ H}$$

$$k = 1 - \frac{R_g \cdot a^2 R_L}{2 \omega_1 \omega_2 L_p^2} = 1 - \frac{600 \Omega \cdot 600 \Omega}{2 (2 \pi)^2 30 \text{ Hz} \cdot 15 \text{ kHz} \cdot 1,59 \text{ H}} = 0,996$$

### 14.4 Consideraciones constructivas

#### Núcleo

A fin de mantener bajas las pérdidas por corrientes parásitas e histéresis, la mayoría de los transformadores utilizados en audiofrecuencias se construyen con núcleos laminados de hierro silicio, estando las chapas troqueladas en forma de E e I, fig. 24. .

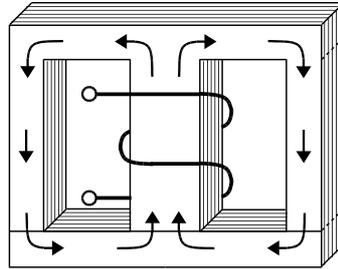


fig. 24

Los núcleos toroidales son poco usados debido a las dificultades que presentan para el bobinado. La sección del núcleo debe ser lo suficientemente grande como para evitar la saturación con el máximo nivel de señal proyectado. Los materiales con mayor permeabilidad magnética tienden a saturarse con menores densidades de flujo.

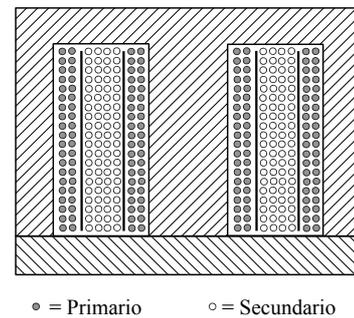
Si además va a circular corriente continua a través del devanado, se debe tener en cuenta que esto va a desplazar el punto de trabajo magnético del núcleo, lo cual reduce el margen de excursión simétrica de la señal.

Para evitar los efectos de la saturación, se introduce a veces una discontinuidad o “ gap “ en el circuito magnético. Esto se hace colocando por ejemplo un delgado espaciador de papel entre la columna central de la E y la I del núcleo. La permeabilidad magnética de ese gap de aire es tan baja, comparada con la del núcleo, que efectivamente controla la densidad de flujo de todo el circuito magnético. Esto reduce drásticamente la inductancia de la bobina, pero evita que el flujo llegue a niveles que saturarían el núcleo, especialmente cuando circula una componente de corriente continua grande a través del bobinado.

#### Inductancia de dispersión y técnica del bobinado

En un transformador ideal, todo el flujo generado por el primario atraviesa también al secundario. El porcentaje del flujo que acopla los bobinados primario y secundario depende del espacio físico entre ellos y de como están dispuestos uno respecto del otro. La menor dispersión se logra bobinándolos sobre un eje común y lo más próximos posible uno del otro. Una técnica común es hacerlo en secciones entrelazadas: porciones del primario y/o del secundario se bobinan en

secuencia, de modo de entrelazarlas. La fig. 25 muestra el corte de un transformador de 3 secciones, donde se ha bobinado la mitad del primario, luego el secundario y finalmente la segunda mitad del primario. De esta disposición resulta una inductancia de dispersión mucho menor que con 2 secciones. Las pérdidas disminuyen rápidamente al aumentar el número de secciones.



• = Primario      ○ = Secundario

fig. 25

### Capacidades parásitas y blindaje electrostático.

A fin de permitir que quepan el mayor número posible de espiras en un espacio dado, el alambre usado para bobinar transformadores es muy delgado y está recubierto por una fina capa de esmalte poliuretano. Tanto el primario como el secundario se devanan en capas superpuestas, resultando de ello una capacidad distribuida parásita entre capas del bobinado que puede llegar a ser considerable. Estas capacidades están representadas en la fig. 26 por  $C_p$  y  $C_s$ . Para reducirlas, a veces se recurre al llamado “universal winding”: Se devana de ida y vuelta a lo ancho del bobinado y además se varía el número de vueltas y el grado de inclinación del alambre, obteniéndose diferente cantidad de cruces y de vueltas por capa. Como resultado, aquellas espiras entre las que hay una diferencia de tensión no son paralelas sino que se cruzan, obteniéndose una capacidad distribuida más baja.

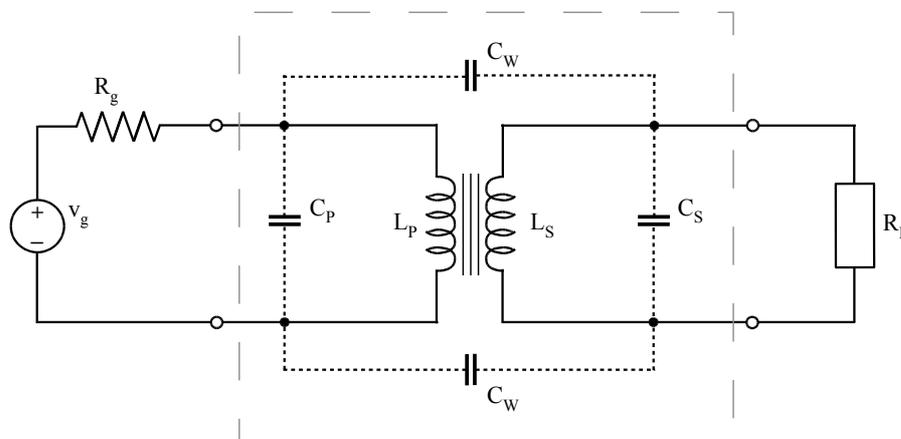


fig. 26

Existen además capacidades parásitas entre el primario y el secundario representadas por  $C_w$ , las mismas son altamente indeseables en algunas aplicaciones y sus efectos se pueden eliminar casi completamente mediante un *blindaje electrostático o de Faraday*. Este blindaje consiste en una fina lámina de cobre colocada entre los bobinados. Los transformadores bobinados en secciones entrelazadas para reducir la inductancia de dispersión, requieren un blindaje de Faraday entre todas las secciones adyacentes, normalmente todos los blindajes que rodean un bobinado están interconectados. Cuando se los conecta a tierra como en la fig. 27, el blindaje electrostático intercepta las corrientes capacitivas que de otro modo fluirían entre los bobinados.

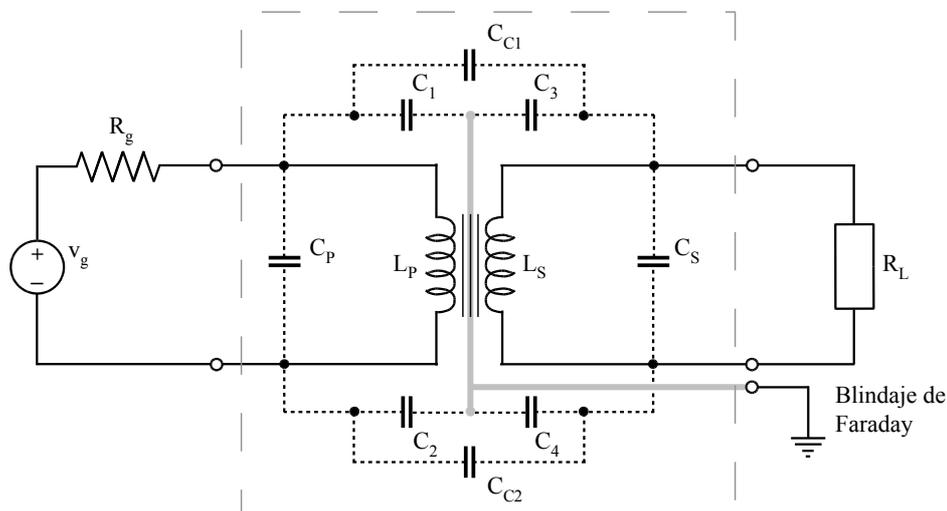


Fig. 27

Casi siempre se usa blindaje electrostático en los transformadores para suprimir el ruido debido a los bucles de tierra. En esta aplicación, se espera que el transformador sólo responda a la señal diferencial presente entre los extremos del primario y que no responda a la tensión de modo común presente entre los terminales del primario y tierra. El blindaje evita el pasaje de este ruido al secundario a través de  $C_w$ . Si el primario es excitado por una línea balanceada,  $C_1$  y  $C_2$  deben estar lo mejor apareados posible para obtener una buena CMRR. Como en la mayoría de las aplicaciones (entradas de línea y micrófonos) el secundario está conectado a un circuito no balanceado, el apareamiento de  $C_3$  y  $C_4$  no es tan importante.

Las capacidades  $C_{C1}$  y  $C_{C2}$  son generalmente muy pequeñas, pero disminuyen la CMRR en las audiofrecuencias altas y reducen el rechazo a las interferencias de radiofrecuencia.

**Blindaje magnético**

Los dispositivos tales como motores eléctricos o transformadores de poder generan poderosos campos magnéticos de CA. Si uno de estos campos llega a atravesar el núcleo de un transformador de audio, puede inducir una tensión indeseable en sus bobinados, la cual generalmente se oye como un zumbido. Esto se puede a veces anular re-orientando el dispositivo origen de la interferencia y/o el transformador bajo su influencia.

Otro modo de reducir la captación de este “zumbido” es rodeando el núcleo del transformador con un circuito magnético cerrado. Este *blindaje magnético* consiste en una caja o envoltura de alta permeabilidad magnética ajustada al transformador. Como el blindaje rodea totalmente al mismo, el campo magnético externo fluirá a través de dicho blindaje en lugar de hacerlo a través del núcleo del transformador.

**Bibliografía**

Sears y Zemansky, Física General (University Physics)

Everitt y Anner, Ingeniería de Comunicaciones

M. Kuznetsov, Fundamentos de electrotecnia

Bill Whitlock, Audio Transformers (Cap. 11 de G. Ballou, Handbook for Sound Engineers)